16. Etude asymptotique des suites et séries

Exercice 1. Montrer que

1. $\ln n - \sqrt{n} = \mathrm{o}(n)$.
2. $\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.
3. $\arctan \frac{1}{n} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 2. Déterminer un équivalent de la suite dont le terme général u_n est explicité dans chacun des cas suivants.

1. $\sqrt{1+\dfrac{5}{n^2}} - 1$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{n^3}$.
3. $\dfrac{\mathrm{e}^n - 2\ln(n) + 7n^2}{\ln(n^2+1)}$.
4. $\dfrac{\mathrm{e}^n - \mathrm{e}^{2n} + n^2}{\sqrt{n^2+1}}$.
5. $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - \mathrm{e}^{\frac{-1}{n}}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{-1}{n}}}$.
6. $\dfrac{\arctan(\frac{4\ln n}{n+1})}{\tan(\frac{3}{n^3+n})}$.
7. $\dfrac{n^2(\ln(n+1) - \ln(n))}{\sqrt{n^2+1}}$.

Exercice 3.

1. Montrer que $\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \sim \frac{2}{n}$.
2. En utilisant l'égalité des accroissements finis, montrer $\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim -\dfrac{\ln n}{n^2}$.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{k^2} \sim \mathrm{e}^{n^2}$.

Exercice 4. Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes non nuls telles que $u_n \sim v_n$.

1. Montrer que $|u_n| \sim |v_n|$.
2. Supposons de plus que u_n, v_n positives à partir d'un certain rang. Montrer que $\sqrt{u_n} \sim \sqrt{v_n}$.

Exercice 5 – *D'après Ecricome*. Le but de cet exercice est de montrer que $n!$ n'est pas équivalent à n^n. Pour cela, on note, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \frac{n^n}{n!}$.

1. Déterminer la limite de $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
2. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
   a. Ecrire u_{n+1} en fonction de u_n.
   b. En déduire une contradiction et conclure.

Exercice 6.

1. On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
   a. Démonter que la série converge.
   b. Déterminer des réels a, b et c tels que $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$.
   c. En déduire la somme de la série.
2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)\,\ln(n+1)}$ et, en cas de convergence, déterminer sa somme.

Exercice 7. On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\frac{n+1}{n} - \ln\frac{n}{n-1}$.
2. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ converge et calculer sa somme.

Exercice 8. Etudier la convergence et le cas échéant déterminer les sommes des séries suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} (4k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^k$.
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{2^{n+3}}$.
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{3+2^n}{4^{n+1}}$.
4. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} (-1)^k k\,\mathrm{e}^{-k}$.
5. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{3k^2+1}{5^k}$.
6. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{k+2^k}{k!}$.
7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n^2+1)\times 2^n}{(n+1)!}$.

Exercice 9. Soit $u_0 \in]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 1$, puis que (u_n) converge vers 0.
2. Montrer que la série de terme général u_n^2 converge et déterminer sa somme.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge.

4. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 10. Déterminer la nature des séries suivantes.

1. $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{1}{3^k+1}$.
2. $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\sqrt{n}\ln(n)}$.
3. $\sum\limits_{k\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{k}-1}$.
4. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}$.
5. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-n^2}$.
6. $\sum\limits_{n\geqslant 1} (\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3})$.
7. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\sqrt{n+4}}$.
8. $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
9. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}\right)$.
10. $\sum\limits_{n\geqslant 1} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^\alpha$ selon $\alpha\in\mathbb{R}$.

Exercice 11 – *Convergence sans absolue convergence*.

1. Montrer que pour tout $p\in\mathbb{N}^\star$, $\frac{1}{p+1}\leqslant \ln(p+1)-\ln(p)\leqslant \frac{1}{p}$.
2. On pose $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, $S_n\leqslant \ln 2\leqslant S_n+\frac{1}{2n}$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^\star, S_n=\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$.
4. Montrer que la série de terme général $u_k=\frac{(-1)^{k+1}}{k}$, pour $k\in\mathbb{N}^\star$, converge. Cette série est-elle absolument convergente ?

Exercice 12.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, l'équation $x+\mathrm{e}^x=n$ admet une unique solution notée x_n.
2. Déterminer la limite et un équivalent de x_n.

Exercice 13.

1. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} k!$.
2. Montrer que pour tout $n\geqslant 2$,
$$0\ \leqslant\ \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}k!-1\ \leqslant\ \frac{1}{n}+\frac{n-2}{n(n-1)}.$$
3. En déduire un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n}k!$.

Exercice 14. Pour $n\in\mathbb{N}^\star$, on pose $u_n=\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$.

1. Calculer $u_{n+1}-u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$.
2. En déduire la convergence de la suite (u_n).

Exercice 15. Soit (u_n) la suite définie par
$$u_0\geqslant 0 \quad\text{et}\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=\frac{\mathrm{e}^{-u_n}}{(n+1)^2}.$$

1. Déterminer un équivalent de u_n.
2. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 16. On pose, pour tout entier $n\geqslant 2$,
$$u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad\text{et}\quad v_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}.$$

1. Pour $n\geqslant 2$, on pose $S_n=\sum\limits_{k=2}^{n}u_k$.

   Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont adjacentes.
2. Que peut-on en déduire pour la série de terme général u_n ?
3. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $u_n-v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
4. Que peut-on en déduire pour la série de terme général v_n ?

Exercice 17. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Exercice 18. Le but de cet exercice est d'étudier la nature de la série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$ à l'aide d'une comparaison série-intégrale.

1. Déterminer le sens de variation de $f : x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^2}$ sur $[2, +\infty[$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$,
$$\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^2} \leqslant \int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(2).$$
3. Pour tout entier $n \geqslant 2$, calculer $\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $u = \ln(t)$.
4. En déduire la nature de la série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$.
5. En adaptant la méthode, étudier la nature de la série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 19. Montrer que $\ln(n!) \sim n\ln(n)$ à l'aide d'une comparaison série-intégrale.

Exercice 20. Soit $f : t \mapsto \ln(1+t) + \frac{t^2}{1+t^2}$ définie sur $[0, +\infty[$. On considère l'équation :
$$f(t) = \frac{1}{n} \qquad (E_n)$$

1. Montrer que f est strictement croissante.
2. Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle à déterminer. En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution dans $[0, +\infty[$, qu'on note a_n dans la suite.
3. Préciser le sens de variation de f^{-1}, et en déduire le sens de variation et la limite de la suite (a_n).
4. Déterminer la limite de $\frac{f(t)}{t}$ en 0 et en déduire un équivalent de la suite (a_n).

Exercice 21. Pour tout entier $k \geqslant 2$, on définit f_k par
$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{(\ln(x))^k}{x-1} & \text{si } x > 0 \text{ et } x \neq 1, \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Première partie : Étude des fonctions f_k.

1. Soit $k \geqslant 2$. Montrer que f_k est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star \setminus \{1\}$ et déterminer sa dérivée.
2. Montrer que f_k est dérivable en 1 et déterminer $f_k'(1)$.
3. Soit $\varphi_k(x) = k(x-1) - x\ln x$. Étudier les variations de φ.
4. Montrer que l'équation $\varphi_k(x) = 0$ admet une unique solution dans $]1, +\infty[$, on la note a_k.
5. Donner le tableau de variations de f_k (on séparera les cas k pair et $k \geqslant 2$ et k impair et $k \geqslant 3$).

Deuxième partie : Étude asymptotique de la suite $(a_k)_{k\geqslant 2}$.

6. Montrer que pour tout $k \geqslant 2$, $\mathrm{e}^{k-1} \leqslant a_k \leqslant \mathrm{e}^k$. En déduire la limite de (a_k).
7. Pour tout $k \geqslant 2$, on pose $a_k = \mathrm{e}^k(1+b_k)$. Montrer que b_k vérifie l'équation $-k\mathrm{e}^{-k} = (1+b_k)\ln(1+b_k)$.
8. Montrer que $\ln(1+b_k) \geqslant -k\mathrm{e}^{1-k}$, en déduire la limite de (b_k) et $b_k \sim -k\mathrm{e}^{-k}$.
9. En déduire que $a_k = \mathrm{e}^k - k + \mathrm{o}(k)$ lorsque $k \to +\infty$.

Exercice 22 – *d'après EML 2010*. On note f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f : x \mapsto x - \ln(1+x^2).$$

1. *a.* Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer sa dérivée, et en déduire le sens de variation de f.
   b. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f''.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

3. Montrer que (u_n) est décroissante.
4. Etablir que (u_n) converge et déterminer sa limite.
5. Ecrire un programme Python qui calcule et affiche $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$.
6. *a.* Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \leqslant x - \frac{x^2}{2}$.
   b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 \leqslant 2(u_n - u_{n+1})$.
   c. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge.