16. Etude asymptotique des suites et séries

Exercice 1. Montrer que

$$1. \ln n - \sqrt{n} = o(n). \quad 2. \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = o\left(\frac{1}{n}\right). \quad 3. \arctan\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Exercice 2. Déterminer un équivalent de la suite dont le terme général u_n est explicite dans chacun des cas suivants.

$$1. \sqrt{1 + \frac{5}{n^2}} - 1. \quad 2. \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{n^3}. \quad 3. \frac{e^n - 2 \ln(n) + 7n^2}{\ln(n^2 + 1)}.$$

$$4. \frac{e^n - e^{2n} + n^2}{\sqrt{n^2 + 1}}. \quad 5. \frac{e^{\frac{1}{n}} - e^{-\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}} + e^{-\frac{1}{n}}}. \quad 6. \frac{\arctan\left(\frac{4 \ln n}{n+1}\right)}{\tan\left(\frac{3}{n^3+n}\right)}.$$

$$7. \frac{n^2(\ln(n+1) - \ln(n))}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

Exercice 3.

1. Montrer que $\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \sim \frac{2}{n}$.
2. En utilisant l'égalité des accroissements finis, montrer $\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim -\frac{\ln n}{n^2}$.
3. Montrer que $\sum_{k=1}^n e^{k^2} \sim e^{n^2}$.

Exercice 4. Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes non nuls telles que $u_n \sim v_n$.

1. Montrer que $|u_n| \sim |v_n|$.
2. Supposons de plus que u_n, v_n positives à partir d'un certain rang. Montrer que $\sqrt{u_n} \sim \sqrt{v_n}$.

Exercice 5 – D'après Ecricome. Le but de cet exercice est de montrer que $n!$ n'est pas équivalent à n^n . Pour cela, on note, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \frac{n^n}{n!}$.

1. Déterminer la limite de $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
2. On suppose que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.
 - a. Ecrire u_{n+1} en fonction de u_n .

b. En déduire une contradiction et conclure.

Exercice 6.

$$1. \text{ On considère la série } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

a. Démontrer que la série converge.

b. Déterminer des réels a, b et c tels que $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$.

c. En déduire la somme de la série.

$$2. \text{ Déterminer la nature de la série } \sum_{n \geq 2} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n) \ln(n+1)} \text{ et, en cas de convergence, déterminer sa somme.}$$

Exercice 7. On considère la série $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\frac{n+1}{n} - \ln\frac{n}{n-1}$.
2. En déduire que la série $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ converge et calculer sa somme.

Exercice 8. Etudier la convergence et le cas échéant déterminer les sommes des séries suivantes.

$$1. \sum_{k \geq 0} (4k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^k. \quad 4. \sum_{k \geq 1} (-1)^k k e^{-k}. \quad 7. \sum_{n \geq 0} \frac{(n^2+1) \times 2^n}{(n+1)!}.$$

$$2. \sum_{n \geq 0} \frac{n}{2^{n+3}}. \quad 5. \sum_{k \geq 1} \frac{3k^2+1}{5^k}.$$

$$3. \sum_{n \geq 0} \frac{3+2^n}{4^{n+1}}. \quad 6. \sum_{k \geq 1} \frac{k+2^k}{k!}.$$

$$1. \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } \sum_{k=0}^n (4k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^k = 4 \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k.$$

On reconnaît une série géométrique dérivée et une série géométrique. Elles sont

convergentes car $|\frac{1}{3}| < 1$. Ainsi, la série converge, et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (4k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{4}{3} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^n \frac{k}{2^{k+3}} = \frac{1}{2^4} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$.

On reconnaît une série géométrique dérivée convergente car $|\frac{1}{2}| < 1$, donc la série est convergente, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^{n+3}} = \frac{1}{2^4} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}.$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^n \frac{3+2^k}{4^{k+1}} = \frac{3}{4} \sum_{k=0}^n \frac{1}{4^k} + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{4^k} = \frac{3}{4} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{4}\right)^k + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

On reconnaît deux séries géométriques convergentes, donc la série est convergente, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3+2^n}{4^{n+1}} = \frac{3}{4} \frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}.$$

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{k=1}^n (-1)^k k e^{-k} = \sum_{k=1}^n k (-e^{-1})^k = -e^{-1} \sum_{k=1}^n k (-e^{-1})^{k-1}$.

Comme $|-e^{-1}| = \frac{1}{e} < 1$, on reconnaît les sommes partielles d'une série géométrique dérivée convergente. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k k e^{-k} = -e^{-1} \frac{1}{(1+e^{-1})^2} = -\frac{e}{(e+1)^2}.$$

5. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} \frac{3k^2+1}{5^k} &= \sum_{k \geq 1} \frac{3k(k-1)+3k+1}{5^k} \\ &= 3 \sum_{k \geq 1} k(k-1) \left(\frac{1}{5}\right)^k + 3 \sum_{k \geq 1} k \left(\frac{1}{5}\right)^k + \sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{5}\right)^k \\ &= \frac{3}{5^2} \sum_{k \geq 2} k(k-1) \left(\frac{1}{5}\right)^{k-2} + \frac{3}{5} \sum_{k \geq 1} k \left(\frac{1}{5}\right)^{k-1} + \sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{5}\right)^k. \end{aligned}$$

On reconnaît trois séries géométriques convergentes. Ainsi, la série converge, et on obtient :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3k^2+1}{5^k} = \frac{3}{5^2} \frac{2}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^3} + \frac{3}{5} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2} + \frac{1}{5} \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{53}{32}.$$

6. On montre que la suite des sommes partielles converge :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{k+2^k}{k!} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k!} \stackrel{l=k-1}{=} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{l!} + \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} - 1 \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e + e^2 - 1. \end{aligned}$$

Donc la série converge, et sa somme vaut $e + e^2 - 1$.

7. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{(k^2+1) \times 2^k}{(k+1)!} &= \sum_{k=0}^n \frac{(k(k+1) - (k+1) + 2) \times 2^k}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)2^k}{(k+1)!} - \sum_{k=0}^n \frac{(k+1)2^k}{(k+1)!} + \sum_{k=0}^n \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{2^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k!} \\ &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2e^2 - e^2 + (e^2 - 1). \end{aligned}$$

Ainsi, la série converge, et sa somme vaut $2e^2 - 1$.

Exercice 9. Soit $u_0 \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n , $0 < u_n < 1$, puis que (u_n) converge vers 0.
2. Montrer que la série de terme général u_n^2 converge et déterminer sa somme.
3. Montrer que $\sum_{n \geq 0} \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge.
4. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

- On montre par une rapide récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n < 1$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 < 0$, donc la suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers un réel ℓ .

On a donc $u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ et $u_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell^2$. Par conséquent, on en déduit que $\ell = \ell - \ell^2$, ce qui donne $\ell^2 = 0$, puis $\ell = 0$.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^n u_k^2 = \sum_{k=0}^n (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u_0,$$

car la somme obtenue est télescopique. Ceci montre la convergence de la série $\sum u_n^2$, dont la somme vaut u_0 .

- On a

$$\sum_{k=0}^n \ln \frac{u_{k+1}}{u_k} = \sum_{k=0}^n \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0),$$

car la somme est télescopique.

Comme $u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$, et $\sum_{n \geq 0} \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$ diverge.

- On a $\ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \ln(1 - u_n) \sim -u_n$ car $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, comme la série à termes positifs $-\sum \ln(1 - u_n)$ est divergente, on en déduit que la série $\sum u_n$ est divergente.

Exercice 10. Déterminer la nature des séries suivantes.

$$1. \sum_{k \geq 0} \frac{1}{3^k + 1}.$$

$$2. \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n\sqrt{n} \ln(n)}.$$

$$3. \sum_{k \geq 2} \frac{1}{\sqrt{k} - 1}.$$

$$4. \sum_{n \geq 1} e^{\frac{1}{n^2}}.$$

$$5. \sum_{n \geq 0} e^{-n^2}.$$

$$6. \sum_{n \geq 1} (\sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n^3}).$$

$$7. \sum_{n \geq 1} \frac{\ln \left(\frac{n+1}{n} \right)}{\sqrt{n+4}}.$$

$$8. \sum_{n \geq 1} (-1)^n (e^{\frac{1}{n}} - 1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

$$9. \sum_{n \geq 1} \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}} \right).$$

$$10. \sum_{n \geq 1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^\alpha \text{ selon } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercice 11 – Convergence sans absolue convergence.

- Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p}$.

- On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leq \ln 2 \leq S_n + \frac{1}{2n}$.

- Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

- Montrer que la série de terme général $u_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, pour $k \in \mathbb{N}^*$, converge. Cette série est-elle absolument convergente ?

Exercice 12.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + e^x = n$ admet une unique solution notée x_n .
- Montrer que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
- Déterminer un équivalent de x_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

- La fonction $f : x \mapsto x + e^x$ est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ comme somme de telles fonctions. Ainsi, le théorème de la bijection assure qu'elle définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur son ensemble image $f(\mathbb{R})$.

Comme $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, on a $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Ainsi, f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et chaque entier $n \in \mathbb{N}$ a un unique antécédent x_n par f , ce qui conclut.

- 1ère rédaction :* on sait que la bijection réciproque f^{-1} de f est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, donc $f^{-1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Ainsi,

$$x_n = f^{-1}(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

2ème rédaction : pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $f(x_n) = n$ et $f(x_{n+1}) = n + 1$, on a $f(x_{n+1}) > f(x_n)$. Par stricte croissance de f , on obtient donc $x_{n+1} > x_n$. Nous avons montré que $(x_n)_n$ est croissante.

La suite diverge vers $+\infty$, car sinon, par croissance, elle converge vers un réel ℓ , et donc $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell)$. C'est une contradiction car $f(x_n) = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

3. On remarque que $x_n = o(e^{x_n})$ du fait que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc $e^{x_n} + x_n \sim e^{x_n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\ln(e^{x_n} + x_n) = \ln e^{x_n}.$$

Or $\ln(e^{x_n} + x_n) = \ln\left(e^{x_n} \left(1 + \frac{x_n}{e^{x_n}}\right)\right) = x_n + \ln\left(1 + \frac{x_n}{e^{x_n}}\right)$. Ainsi

$$\ln n = x_n + \ln\left(1 + \frac{x_n}{e^{x_n}}\right) \sim x_n$$

car $\frac{x_n}{e^{x_n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $\ln\left(1 + \frac{x_n}{e^{x_n}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Finalement, $x_n \sim \ln n$.

Exercice 13. 1. Déterminer la nature de la série $\sum_{k \geq 0} k!$.

2. Montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$0 \leq \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n k! - 1 \leq \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n(n-1)}.$$

3. En déduire un équivalent de $\sum_{k=1}^n k!$.

Exercice 14. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

1. Calculer $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire la convergence de la suite (u_n) .

Exercice 15. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{(n+1)^2}.$$

1. Déterminer un équivalent de u_n .
2. En déduire la nature de la série de terme général u_n .

Exercice 16. On pose, pour tout entier $n \geq 2$,

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

1. Pour $n \geq 2$, on pose $S_n = \sum_{k=2}^n u_k$.

Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

2. Que peut-on en déduire pour la série de terme général u_n ?
3. Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et $u_n - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
4. Que peut-on en déduire pour la série de terme général v_n ?

Exercice 17. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Exercice 18. Le but de cet exercice est d'étudier la nature de la série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$ à l'aide d'une comparaison série-intégrale.

1. Déterminer le sens de variation de $f : x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^2}$ sur $[2, +\infty[$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$,

$$\int_2^n f(t) dt \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(\ln k)^2} \leq \int_2^n f(t) dt + f(2).$$

3. Pour tout entier $n \geq 2$, calculer $\int_2^n f(t) dt$ à l'aide du changement de variable $u = \ln(t)$.
4. En déduire la nature de la série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$.
5. En adaptant la méthode, étudier la nature de la série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 19. Montrer que $\ln(n!) \sim n \ln(n)$ à l'aide d'une comparaison série-intégrale.

Exercice 20. Soit $f : t \mapsto \ln(1+t) + \frac{t^2}{1+t^2}$ définie sur $[0, +\infty[$. On considère l'équation :

$$f(t) = \frac{1}{n} \tag{E_n}$$

1. Montrer que f est strictement croissante.
2. Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle à déterminer. En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution dans $[0, +\infty[$, qu'on note a_n dans la suite.

3. Préciser le sens de variation de f^{-1} , et en déduire le sens de variation et la limite de la suite (a_n) .
4. Déterminer la limite de $\frac{f(t)}{t}$ en 0 et en déduire un équivalent de la suite (a_n) .

Exercice 21. Pour tout entier $k \geq 2$, on définit f_k par

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{(\ln(x))^k}{x-1} & \text{si } x > 0 \text{ et } x \neq 1, \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Première partie : Étude des fonctions f_k .

1. Soit $k \geq 2$. Montrer que f_k est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et déterminer sa dérivée.
2. Montrer que f_k est dérivable en 1 et déterminer $f'_k(1)$.
3. Soit $\varphi_k(x) = k(x-1) - x \ln x$. Étudier les variations de φ .
4. Montrer que l'équation $\varphi_k(x) = 0$ admet une unique solution dans $]1, +\infty[$, on la note a_k .
5. Donner le tableau de variations de f_k (on séparera les cas k pair et $k \geq 2$ et k impair et $k \geq 3$).

Deuxième partie : Étude asymptotique de la suite $(a_k)_{k \geq 2}$.

6. Montrer que pour tout $k \geq 2$, $e^{k-1} \leq a_k \leq e^k$. En déduire la limite de (a_k) .
7. Pour tout $k \geq 2$, on pose $a_k = e^k(1 + b_k)$. Montrer que b_k vérifie l'équation $-ke^{-k} = (1 + b_k) \ln(1 + b_k)$.
8. Montrer que $\ln(1 + b_k) \geq -ke^{1-k}$, en déduire la limite de (b_k) et $b_k \sim -ke^{-k}$.
9. En déduire que $a_k = e^k - k + o(k)$ lorsque $k \rightarrow +\infty$.

Exercice 22 – d'après EML 2010. On note f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto x - \ln(1 + x^2).$$

1.
 - a. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer sa dérivée, et en déduire le sens de variation de f .
 - b. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'' .
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

3. Montrer que (u_n) est décroissante.
4. Etablir que (u_n) converge et déterminer sa limite.
5. Ecrire un programme PYTHON qui calcule et affiche $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq 10^{-3}$.
6.
 - a. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \leq x - \frac{x^2}{2}$.
 - b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 \leq 2(u_n - u_{n+1})$.
 - c. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ converge.