

17. Espaces vectoriels de dimension finie et somme directe

Exercice 1. Soient $u = (-1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 1)$, et $w = (1, 1, -1)$.

1. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les coordonnées de $(2, 1, 3)$ dans cette base.

$$\begin{aligned} 1. \text{ On a } \operatorname{rg}(u, v, w) &= \operatorname{rg}((-1, 1, 1), (0, 0, 2), (0, 2, 0)) \\ &= \operatorname{rg}((-1, 1, 1), (0, 2, 0), (0, 0, 2)). \end{aligned}$$

Ainsi, $\operatorname{rg}(u, v, w) = 3$, et la famille (u, v, w) est une famille libre de cardinal 3, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$2. \text{ On cherche } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tels que } (2, 1, 3) = au + bv + cw. \text{ On trouve } a = 2, b = \frac{5}{2}, c = \frac{3}{2}.$$

Exercice 2. Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3) de $\mathbb{R}_2[x]$, où $P_1(x) = (x-1)(x-2)$, $P_2(x) = (x-1)(x+1)$ et $P_3(x) = (x+1)(x-2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

1ère rédaction : Supposons que $aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0_{\mathbb{R}_2[x]}$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$, et montrons que $a = b = c = 0$. On a

$$\begin{cases} aP_1(1) + bP_2(1) + cP_3(1) = 0 \\ aP_1(2) + bP_2(2) + cP_3(2) = 0 \\ aP_1(-1) + bP_2(-1) + cP_3(-1) = 0 \end{cases} \quad i.e. \quad \begin{cases} -2c = 0 \\ 3b = 0 \\ 6a = 0 \end{cases}$$

Finalement, on a bien $a = b = c = 0$, et la famille (P_1, P_2, P_3) est libre. Comme il s'agit d'une famille de libre de cardinal $3 = \dim \mathbb{R}_2[x]$, (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

$$\begin{aligned} 2\text{ème rédaction : On a } \operatorname{rg}(P_1, P_2, P_3) &= \operatorname{rg}(P_1, P_2 - P_1, P_3 - P_1) \\ &= \operatorname{rg}((x-1)(x-2), 3(x-1), 2(x-2)) \\ &= \operatorname{rg}((x-1)(x-2), x-1, x-2) \\ &= \operatorname{rg}((x-1)(x-2), x-1, -1). \end{aligned}$$

Ainsi, la famille (P_1, P_2, P_3) est une famille libre de cardinal 3, c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

Exercice 3. Déterminer la dimension et une base de F dans chacun des cas suivants.

1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 4x - 5y + z = 0\}$.
2. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = z + t = 0\}$.
3. $F = \{(y + z, x + z, y + x, 2z) \in \mathbb{R}^4, x, y, z \in \mathbb{R}\}$.
4. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), a + b + c + d = 0 \right\}$.
5. $F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n = 0\}$.

Exercice 4. Montrer que les espaces vectoriels $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y + z = 0\}$ et $G = \operatorname{Vect}((1, 1, -1), (1, 2, 0))$ sont égaux.

Exercice 5. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que la famille

$$\left(1, \frac{x-a}{1!}, \frac{(x-a)^2}{2!}, \dots, \frac{(x-a)^n}{n!} \right)$$

est une base $\mathbb{R}_n[x]$.

2. En déduire la formule de Taylor : pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}.$$

Exercice 6. Soit $F = \operatorname{Vect}(I_3, J)$, où $J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la dimension de F .
2. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $J^2 = aI_3 + bJ$.
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J^n \in F$.
4. Trouver toutes les matrices $M \in F$ telles que $M^2 = I_3$. De même avec $M^2 = J$.

Exercice 7. 1. Déterminer le rang des familles suivantes.

- a. $((2, 1, -1), (0, 1, 2), (6, 1, -5))$.
- b. $((1, 2, -1, 1), (0, 1, 1, 1), (2, 3, -3, 1), (-1, 0, 3, 1))$.

- c. $((2, 1, -1), (0, 1, 2), (6, 5, 1))$.
2. Soient $e_1 = (1, 2, 3)$, $e_2 = (0, 1, 1)$, $e_3 = (1, 0, 1)$, $e_4 = (2, 1, 3)$.
- a. Déterminer le rang de la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) .
- b. La famille est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 8.

1. Montrer que $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, 2x - y - z - t = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^4$, et en déterminer une base. De même pour $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - 2y + z + t = 0\}$.
2. Déterminer une base de $F \cap G$.
3. On pose $H = \text{Vect}(v_1, v_2)$ où $v_1 = (1, 0, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1, 1)$. Montrer que $F \cap G$ et H sont supplémentaires.

1. – On a $F = \{(x, y, z, 2x - y - z), x, y, z \in \mathbb{R}\}$.
 $= \text{Vect}((1, 0, 0, 2), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1))$.
- On en déduit que F est un sev de $\mathbb{R}^4$, et la famille échelonnée $((1, 0, 0, 2), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1))$ est une base de F .
- On a $G = \{(x, y, z, -x + 2y - z), x, y, z \in \mathbb{R}\}$.
 $= \text{Vect}((1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, -1))$.
- On en déduit que G est un sev de $\mathbb{R}^4$, et la famille échelonnée $((1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, -1))$ est une base de G .
2. On a $(x, y, z, t) \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z + t = 0 \\ 2x - y - z - t = 0 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z + t = 0 \\ 3y - 3z - 3t = 0 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = z + t \\ y = z + t \end{cases}$

Finalement, $F \cap G = \{(z + t, z + t, z, t), z, t \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1))$.
 La famille libre (v_3, v_4) où $v_3 = (1, 1, 1, 0)$ et $v_4 = (1, 1, 0, 1)$ est donc une base de $F \cap G$.

3. Il suffit de voir que la famille obtenue en concaténant les bases de $F \cap G$ et H est

une base de $\mathbb{R}^4$. On a

$$\begin{aligned} \text{rg}(v_1, v_2, v_3, v_4) &= \text{rg}((1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1)) \\ &= \text{rg}((1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 1, 0, -1), (0, 1, -1, 0)) \\ &= \text{rg}((1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, -1, -2), (0, 0, -2, -1)) \\ &= \text{rg}((1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, -1, -2), (0, 0, 0, 3)) \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{rg}(v_1, v_2, v_3, v_4) = 4$, et la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est une famille libre de 4 vecteurs de $\mathbb{R}_3[x]$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_3[x]$. Nous avons donc montré que $F \cap G$ et H sont supplémentaires.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices anti-symétriques sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 10. Soient les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} F &= \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n) \text{ converge}\}, \\ G &= \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0\}, \\ H &= \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n) \text{ est constante}\}. \end{aligned}$$

Montrer que $F = G \oplus H$.

Exercice 11. On note E l'espace vectoriel des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et on considère les sous-espaces vectoriels de E :

$$F = \{f \in E, f(0) = f'(0) = 0\}, \quad \text{et} \quad G = \{x \mapsto ax + b, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 12. Soit $E = \mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{R})$. On définit $F = \{f \in E, f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = f(\pi)\}$ et $G = \text{Vect}(\sin, \cos)$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .

2. Montrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 13. Soit $E = \mathbb{R}_3[x]$. On définit les sous-espaces vectoriels de E :

$$\begin{aligned} F &= \{P \in E, P(0) = P(1) = P(2) = 0\}, \\ G &= \{P \in E, P(1) = P(2) = P(3) = 0\}, \\ H &= \{P \in E, P(-x) = P(x)\}. \end{aligned}$$

- Déterminer une base de F , G et H .
- Montrer que $F \oplus G = \{P \in E, P(1) = P(2) = 0\}$.
- Montrer que $E = (F \oplus G) \oplus H$.

- On sait que si $P \in \mathbb{R}_3[x]$, alors $P \in F$ ssi P est de la forme $P(x) = ax(x-1)(x-2)$, où $a \in \mathbb{R}$. Finalement,

$$F = \{ax(x-1)(x-2), a \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(x(x-1)(x-2)).$$

Ainsi, F est engendré par un seul vecteur non nul. Par conséquent, $\dim F = 1$, et $(x(x-1)(x-2))$ est une base de F .

- De manière analogue, $((x-1)(x-2)(x-3))$ est une base de H .
- Si $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x]$, alors

$$\begin{aligned} P \in H &\Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d = -ax^3 + bx^2 - cx + d \\ &\Leftrightarrow 2ax^3 + 2cx = 0_{\mathbb{R}[x]} \\ &\Leftrightarrow a = c = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $P = \{bx^2 + d, b, d \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(x^2, 1)$. Comme la famille $(x^2, 1)$ est libre, c'est une base de H .

- Montrons que la somme $F + G$ est directe : si $P \in F \cap G$, alors P est un polynôme de degré au plus 3 qui possède 4 racines : 0, 1, 2, 3. Par conséquent, P est nul. On a donc bien montré $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}[x]}\}$.
- Montrons que $V = F + G$, où on note $V = \{P \in E, P(1) = P(2) = 0\}$. Comme $F \subset V$ et $G \subset V$, F et G sont des sev de V , et on a $F + G \subset V$. Si on montre $\dim V = \dim(F + G)$, on aura alors montré $V = F + G$.

$$\begin{aligned} \text{On a } V &= \{(ax+b)(x-1)(x-2), a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{ax(x-1)(x-2) + b(x-1)(x-2), a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}(x(x-1)(x-2), (x-1)(x-2)). \end{aligned}$$

Comme la famille $(x(x-1)(x-2), (x-1)(x-2))$ est libre (échelonnée en

degré), c'est une base de V , et $\dim V = 2$.

On sait par ailleurs que $\dim F + G = \dim F + \dim G = 2$ comme la somme est directe. Par conséquent, $V = F + G$.

On a ainsi montré $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}[x]}\}$ et $V = F + G$, donc $V = F \oplus G$.

- D'après la question précédente, il suffit de montrer que $E = V \oplus H$. On sait que $\mathcal{B} = (x(x-1)(x-2), (x-1)(x-2))$ est une base de V , et $\mathcal{B}' = (x^2, 1)$ est une base de H . Par ailleurs

$$\begin{aligned} \text{rg}(\mathcal{B} \cup \mathcal{B}') &= \text{rg}(x(x-1)(x-2), (x-1)(x-2), x^2, 1) \\ &= \text{rg}(x(x-1)(x-2), (x-1)(x-2), 3x-2, 1) \end{aligned}$$

La famille échelonnée en degré $(x(x-1)(x-2), (x-1)(x-2), 3x-2, 1)$ est libre donc $\text{rg}(\mathcal{B} \cup \mathcal{B}') = 4$, et $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$, car $\dim \mathbb{R}_3[x] = 4$. On a donc bien montré que $F \oplus G = V$ et H sont des sev supplémentaires de E .

Exercice 14. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie E tels que

$$\dim F + \dim G > \dim E.$$

Montrer que $F \cap G \neq \{0_E\}$.

Exercice 15. Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E . On suppose que :

$$G \subset H, \quad F \cap G = F \cap H \quad \text{et} \quad F + G = F + H.$$

- On suppose que E est de dimension finie.
 - Montrer que $\dim G = \dim H$.
 - En déduire que $G = H$.
- On suppose que E est de dimension infinie. Montrer encore que $G = H$.

Exercice 16. Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels de dimension 2 de bases respectives (u_1, v_1) et (u_2, v_2) .

- Montrer que la famille composée des vecteurs

$$\varepsilon_1 = (u_1, 0_{E_2}), \quad \varepsilon_2 = (v_1, 0_{E_2}), \quad \varepsilon_3 = (0_{E_1}, u_2), \quad \varepsilon_4 = (0_{E_1}, v_2)$$

est une base de $E_1 \times E_2$, dont on admettra qu'il forme un espace vectoriel (avec les lois $+$ et $\cdot$ données par $(u, v) + (u', v') = (u + u', v + v')$ et $\lambda \cdot (u, v) = (\lambda u, \lambda v)$).

2. En déduire la dimension de $E_1 \times E_2$.
3. En généralisant le résultat précédent, montrer que si $\dim E_1 = n$ et $\dim E_2 = p$, alors $\dim(E_1 \times E_2) = n + p$.

Exercice 17. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Le but de cet exercice est de montrer la formule de Grassmann :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Soit F_1 un supplémentaire de $F \cap G$ dans F c'est-à-dire $F_1 \oplus (F \cap G) = F$.

1. Montrer que $F_1 \oplus G = F + G$.
2. En déduire la formule de Grassmann.
3. Montrer que F et G sont supplémentaires si et seulement si $F + G = E$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.