

18. Compléments sur la dérivation

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans chacun des cas suivants, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition, et calculer sa dérivée d'ordre n .

1. $f : x \mapsto x^2(1+x)^n$.
2. $f : x \mapsto x^{n-1} \ln(x)$.
3. $f : x \mapsto \frac{1}{x(x+1)}$.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : x \mapsto x^{2n}$. En calculant $f^{(n)}$ de deux manières différentes, montrer que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 3. Soit f la fonction arctan définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $f^{(n)}$ est de la forme $f^{(n)} : x \mapsto \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$, où P_n est une fonction polynomiale.
Montrer par ailleurs que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = (1+x^2)P'_n(x) - 2nxP_n(x).$$

2. Pour tout $n \geq 1$, déterminer le degré de P_n et son coefficient dominant.

Exercice 4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \neq 0$:

$$f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_n\left(\frac{1}{x}\right),$$

où P_n désigne un polynôme.

2. En déduire que f se prolonge par continuité en 0 et que la fonction ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$, montrer que

$$\int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2} dt = \frac{\ln 2}{2}.$$

Exercice 6. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

En utilisant la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ et une formule de Taylor appropriée, montrer que (u_n) converge vers $\ln 2$.

Exercice 7. Déterminer les points d'inflexion de $x \mapsto xe^{-x^2/2}$.

Exercice 8. Soit f une fonction convexe, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Exercice 9.

1. Soient a et b deux réels. Montrer que $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$.
2. a. Montrer que $f : x \mapsto \ln(\ln x)$ est concave sur $]1, +\infty[$.
b. En déduire que pour tous $a, b > 1$,

$$\ln \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{\ln a \ln b}.$$

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que pour tous réels $x_1, \dots, x_n$ strictement positifs,

$$1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \prod_{k=1}^n (1+x_k)^{\frac{1}{n}}.$$

3. Montrer que pour tous réels $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ strictement positifs,

$$(a_1 \dots a_n)^{1/n} + (b_1 \dots b_n)^{1/n} \leq ((a_1 + b_1) \times \dots \times (a_n + b_n))^{1/n}.$$

Exercice 11. Soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. En exploitant la concavité de $x \mapsto \ln x$, établir que pour tous $u, v \in \mathbb{R}_+$, on a

$$u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leq \frac{u}{p} + \frac{v}{q}.$$

2. Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+$. On suppose que $\sum_{k=1}^n a_k^p \neq 0$ et $\sum_{k=1}^n b_k^q \neq 0$.

En posant $u_i = \frac{a_i^p}{\sum_{k=1}^n a_k^p}$ et $v_i = \frac{b_i^q}{\sum_{k=1}^n b_k^q}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, montrer que

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Cette inégalité porte le nom d'*inégalité de Hölder*.

Exercice 12. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction f_a définie par $f_a : x \mapsto x\sqrt{a-x^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition D_{f_a} de f_a .
2. Montrer que f_a est deux fois dérivable sur un intervalle à préciser.
3. Etudier les variations de f_a sur D_{f_a} .
4. Etudier la convexité de la fonction f_a sur D_{f_a} .
5. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f_a en son point d'inflexion.
6. Donner l'allure de la courbe représentative de f_1 .
7. Donner l'allure de la courbe représentative de $x \mapsto |x|\sqrt{1-x^2}$, en justifiant soigneusement.

Exercice 13. Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$ et f_m la fonction définie par $f_m : x \mapsto \ln(2 + mx^2)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f_m .
2. Etudier les variations de f_m sur son domaine de définition.
3. Etudier la convexité de f_m .
4. Montrer que les tangentes aux points d'inflexion ont un point commun G appartenant à l'axe des ordonnées, qui ne dépend pas de m .
5. Construire la représentation graphique de f_2 .