19. Espaces probabilisés, variables aléatoires réelles discrètes et lois usuelles

Exercice 1. Soient $N \in \mathbb{N}^\star$ et $A_1, \dots, A_N$ des événements. Écrire les événements suivants avec les symboles ensemblistes $(\cap, \cup, \dots)$.

1. Au moins un des événements $A_1, \dots, A_N$ est réalisé.
2. Tous les événements $A_1, \dots, A_N$ sont réalisés.
3. Aucun des événements $A_1, \dots, A_N$ n'est réalisé.
4. Seul A_1 est réalisé.
5. Un et un seul des événements $A_1, \dots, A_N$ est réalisé.

Exercice 2. *Vrai ou faux ?*

1. Si A_1 et A_2 sont deux événements négligeables, alors $A_1 \cup A_2$ est un événement négligeable.
2. Si B_1 et B_2 sont deux événements presque sûrs, alors $B_1 \cap B_2$ est un événement presque sûr.

Exercice 3. On considère une pièce non équilibrée telle que la probabilité d'obtenir pile soit deux fois celle d'obtenir face.

1. On lance la pièce une fois. Quelle est la probabilité d'obtenir pile ? D'obtenir face ?
2. On lance la pièce une infinité de fois. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois pile.

Exercice 4. Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle, en commençant par A, une pièce non équilibrée telle que la probabilité d'obtenir Face vaut $p \in]0,1[$. Le premier qui obtient Face gagne le jeu, qui s'arrête alors. On suppose l'expérience modélisé par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. On note G_n l'événement "le joueur A gagne à son n-ème lancer", et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on introduit les événements A_k : "A obtient Face au k-ème lancer", et B_k : "B obtient Face au k-ème lancer".

   Ecrire G_n en fonction de certains événements A_k, B_k, et déterminer $\mathbb{P}(G_n)$.
2. On note G l'événement "A gagne". Écrire G en fonction des événements G_n, et déterminer $\mathbb{P}(G)$.
3. Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête pas ?
4. Y a-t-il une valeur de p qui assure que les deux joueurs aient la même probabilité de gagner ?

1. On a $G_n = \overline{A}_1 \cap \overline{B}_1 \cap \dots \cap \overline{A}_{n-1} \cap \overline{B}_{n-1} \cap A_n$, donc
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G_n) &= \mathbb{P}\left(\overline{A}_1 \cap \overline{B}_1 \cap \dots \cap \overline{A}_{n-1} \cap \overline{B}_{n-1} \cap A_n\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\overline{A}_1\right) \mathbb{P}\left(\overline{B}_1\right) \dots \mathbb{P}\left(\overline{A}_{n-1}\right) \mathbb{P}\left(\overline{B}_{n-1}\right) \mathbb{P}\left(A_n\right) \\ &= (1-p)^{2(n-1)} p, \end{aligned}$$
   par indépendance des lancers.
2. On a $G = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^\star} G_n$: le joueur A gagne si et seulement si un des événements (deux à deux incompatibles) G_n est réalisé. Ainsi, on a
$$\mathbb{P}(G) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(G_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{2(n-1)} p = p \sum_{n=0}^{+\infty} \left((1-p)^2\right)^n.$$
   Ainsi, $\mathbb{P}(G) = p \dfrac{1}{1-(1-p)^2} = \dfrac{p}{2p-p^2} = \dfrac{1}{2-p}$.
3. Soit C : "le jeu ne s'arrête pas". L'événement C est réalisé si et seulement si les deux joueurs obtiennent Pile indéfiniment. Ainsi, $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^\star} \overline{A}_n \cap \overline{B}_n$. Le théorème de la limite monotone entraîne alors :
$$\mathbb{P}(C) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A}_k \cap \overline{B}_k\right) = \lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{A}_k \cap \overline{B}_k\right) = \lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{A}_k\right) \mathbb{P}\left(\overline{B}_k\right),$$
   par indépendance des lancers. Par conséquent, $\mathbb{P}(C) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left((1-p)^2\right)^n = 0$.
4. Si on note H l'événement : "le joueur B gagne", on remarque que G, H et C forment un système complet d'événements. Ainsi, $\mathbb{P}(H) = 1 - \mathbb{P}(G) - \mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(G)$.

   Par conséquent, les deux joueurs ont la même probabilité de gagner si et seulement si $\mathbb{P}(G) = 1 - \mathbb{P}(G)$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(G) = \frac{1}{2}$. Or
$$\frac{1}{2-p} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 - p = 2 \Leftrightarrow p = 0.$$
   Comme $p \in]0,1[$, on en déduit qu'il n'existe pas de telle valeur de p.

Exercice 5. Un joueur vise une cible avec une fléchette. À chaque lancer, il atteint la cible avec une probabilité $p \in]0,1[$.

Il effectue une série de lancers indépendants. Il gagne lorsque, pour la première fois, sur n lancers, le nombre de fois où il atteint sa cible excède de 2 le nombre de fois où il la manque ; et il perd lorsque, pour la première fois, sur n lancers, le nombre de fois où il manque sa cible excède de 2 le nombre de fois où il l'atteint. On arrête la partie lorsque le joueur gagne ou perd.

On note : A_n : "le joueur gagne au n-ème lancer", B_n : "le joueur perd au n-ème lancer", A : "le joueur gagne", et B : "le joueur perd".

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(A_{2n})$, $\mathbb{P}(A_{2n+1})$, $\mathbb{P}(B_{2n})$ et $\mathbb{P}(B_{2n+1})$.
2. En déduire $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$. Déterminer la probabilité que la partie dure indéfiniment.

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$4\,\mathbb{P}(X = k+2) \;=\; 9\,\mathbb{P}(X = k+1) - 2\,\mathbb{P}(X = k).$$

1. Déterminer la loi de X.
2. Justifier que X admet une espérance et une variance et les calculer.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $u_k = \mathbb{P}(X = k)$. Alors, on a $4u_{k+2} = 9u_{k+1} - 2u_k$ pour tout entier k, et la quite (u_k) est alors une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

   On commence par résoudre l'équation caractéristique $4r^2 - 9r + 2 = 0$, qui a deux solutions $r_1 = \frac{1}{4}$ et $r_2 = 2$. On sait alors qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout k,
   $$u_k \;=\; \alpha \left(\frac{1}{4}\right)^k + \beta\, 2^k.$$
   Comme on doit avoir $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 1$, il est nécessaire que $u_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui impose que $\beta = 0$. Par ailleurs, on a
   $$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha \left(\frac{1}{4}\right)^k \;=\; \alpha\,\frac{1}{1-\frac{1}{4}} \;=\; \frac{4\alpha}{3}.$$
   Ainsi, il est nécessaire que $\frac{4\alpha}{3} = 1$, c'est-à-dire $\alpha = \frac{3}{4}$. Réciproquement, avec ce choix, la suite (u_k) définit bien une loi de probabilité.

   Finalement, on a $\mathbb{P}(X = k) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.

2. *1ère méthode* : la série $\sum |k|\,\mathbb{P}(X = k) = \frac{3}{4}\sum k\left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{3}{16}\sum k\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$ converge car on reconnaît une série géométrique dérivée convergente, donc X admet une espérance, et
   $$\mathbb{E}(X) \;=\; \frac{3}{16}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \;=\; \frac{3}{16}\,\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} \;=\; \frac{1}{3}.$$
   En écrivant $k^2 = k(k-1) + k$, on remarque que la série $\sum_{k\geqslant 0} k^2\,\mathbb{P}(X = k)$ peut s'écrire :
   $$\frac{3}{4}\sum_{k\geqslant 1} k^2\left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{3}{4}\,\frac{1}{4^2}\sum k(k-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2} + \frac{3}{4}\sum k\left(\frac{1}{4}\right)^k$$
   On reconnaît une série géométrique dérivée convergente, et la série convergente dont on a calculé la somme ci-dessus. Ainsi, par le théorème de transfert, X^2 admet une espérance, et
   $$\mathbb{E}(X^2) \;=\; \frac{3}{4^3}\,\frac{2}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^3} + \frac{1}{3} \;=\; \frac{2}{9} + \frac{1}{3} \;=\; \frac{5}{9}.$$
   Par conséquent, X admet une variance, et $\mathbb{V}(X) = \frac{5}{9} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

   2ème méthode : on reconnaît que X suit presque une loi géométrique. En passant $Y = X + 1$, on remarque que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^\star$ et $\mathbb{P}(Y = k) = \frac{3}{4}(14)^{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$. Ainsi, $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(\frac{3}{4})$.

   Par conséquent, $\mathbb{E}(Y) = \frac{4}{3}$ et $\mathbb{V}(Y) = \frac{4}{9}$, donc
   $$\mathbb{E}(X) \;=\; \mathbb{E}(Y) - 1 \;=\; \frac{1}{3}, \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) \;=\; \mathbb{V}(Y-1) \;=\; \mathbb{V}(Y) \;=\; \frac{4}{9}.$$

Exercice 7. Un basketteur effectue des lancers francs.

– Lorsqu'il marque, la probabilité qu'il marque au lancer suivant est $\frac{2}{3}$.
– Lorsqu'il ne marque pas, la probabilité qu'il ne marque pas au lancer suivant est $\frac{3}{4}$.
– Au premier lancer, on suppose qu'il a autant de chance de marquer que de ne pas marquer.

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note A_n : "le basketteur marque au n-ième lancer", et $u_n = \mathbb{P}(A_n)$.

1. *a.* Calculer u_1 et u_2.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = \frac{5}{12}\,u_n + \frac{1}{4}$.
   c. En déduire u_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$.
2. Montrer que presque sûrement, le joueur finit par marquer un lancer franc.

3. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers nécessaires pour marquer pour la première fois si le joueur finit par marquer, et 0 sinon.
   a. Déterminer la loi de X.
   b. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
   c. Proposer un programme PYTHON pour simuler l'expérience, et estimer l'espérance.

1. *a.* On a $u_1 = \mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2}$ d'après l'énoncé. Par ailleurs, en utilisant le système complet $(A_1, \overline{A}_1)$, on a

$$\mathbb{P}(A_2) \;=\; \mathbb{P}_{A_1}(A_2)\,\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}_{\overline{A}_1}(A_2)\mathbb{P}(\overline{A}_1) \;=\; \frac{2}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{1}{2} \;=\; \frac{11}{24}.$$

   b. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. En utilisant le système complet $(A_n, \overline{A}_n)$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{n+1}) &= \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})\,\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{\overline{A}_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(\overline{A}_n)\\ &= \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{4}(1-u_n) \;=\; \frac{5}{12}u_n + \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

   c. La suite $(u_n)_n$ est donc arithmético-géométrique. On résout $\ell = \frac{5}{12}\ell + \frac{1}{4}$, et on obtient $\ell = \frac{3}{7}$. On sait donc que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$u_n \;=\; (u_1 - \ell)\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \ell \;=\; \frac{1}{14}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{3}{7}.$$

2. On note A l'événement : "le joueur finit par marquer un lancer franc". On remarque que

$$\overline{A} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k, \quad \text{donc} \quad \mathbb{P}(\overline{A}) \;=\; \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\right) \;=\; \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)$$

par le théorème de la limite monotone. Or on a pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, par la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \;=\; \mathbb{P}(\overline{A}_1)\,\mathbb{P}_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2)\ldots\mathbb{P}_{\overline{A}_1\cap\ldots\cap\overline{A}_{n-1}}(\overline{A}_n) \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.$$

Comme $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $\mathbb{P}(\overline{A}) = 0$, donc $\mathbb{P}(A) = 1$, ce qui conclut.

3. *a.* On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^\star$. Par ailleurs, $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$, et si $k \geqslant 2$, par la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) &= \mathbb{P}(\overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_{k-1} \cap A_k)\\ &= \mathbb{P}(\overline{A}_1)\,\mathbb{P}_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2)\ldots\mathbb{P}_{\overline{A}_1\cap\ldots\overline{A}_{k-2}}(\overline{A}_{k-1})\,\mathbb{P}_{\overline{A}_1\cap\ldots\overline{A}_{k-1}}(A_k)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-2}\frac{1}{4} \;=\; \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-2}.\end{aligned}$$

   b. La série $\sum_{k\geqslant 2} |k|\,\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{6}\sum_{k\geqslant 2} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$ est convergente car on reconnaît une série géométrique dérivée convergente. Ainsi, X admet une espérance, et

$$\mathbb{E}(X) \;=\; \mathbb{P}(X=1) + \frac{1}{6}\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \;=\; \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{3}{4}\right)^2} - 1\right),$$

   donc $\mathbb{E}(X) = 3$.

Exercice 8. On estime que la demande d'un produit saisonnier particulier peut être modélisée par une variable aléatoire discrète X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$, et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{r^k}{(1+r)^{k+1}},$$

où $r > 0$ est le prix de la campagne publicitaire de l'année précédente.

1. Vérifier qu'on a bien défini une loi de probabilité.
2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Une variance ? Si oui, les calculer.
3. On dispose d'un stock de n produits, déterminer la probabilité de rupture de stock en fonction de r et n.

Exercice 9. Un jeu vidéo contient n niveaux avec $n \geqslant 3$. Le jeu commence au niveau 1. Il faut réussir un niveau pour passer au suivant. Le jeu s'arrête quand on a échoué ou qu'on a fini le niveau n. On suppose que la probabilité de réussir le niveau k sachant que l'on parvient au niveau k est $\frac{1}{k}$.
Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de niveaux franchis par le joueur au moment où le jeu s'arrête.

1. Montrer que
$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{k}{(k+1)!} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n!}.$$
2. Calculer $\mathbb{E}(X_n + 1)$ et en déduire que $\mathbb{E}(X_n) = S_n - 1$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.
3. Déterminer la limite de $(\mathbb{E}(X_n))$ quand n tend vers $+\infty$.
4. Exprimer $\mathbb{E}((X_n - 1)(X_n + 1))$ a l'aide de S_{n-1}. En déduire la variance de X_n en fonction de S_n, n et S_{n-1}.
5. En déduire la limite de la variance quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 10. Pour chacun des énoncés suivants, proposer une loi pour la variable aléatoire X.

1. On lance un dé équilibré à 6 faces et X est la variable donnant le nombre obtenu.
2. On lance 10 fois ce même dé et X désigne le nombre de nombres pairs obtenus.
3. On tire avec remise 20 boules dans une urne contenant 5 boules noires, 3 boules rouges et 7 boules jaunes. La variable aléatoire X correspond au nombre de boules noires obtenues.
4. Avec la même urne dans laquelle on tire successivement avec remise, on note X le nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois une boule jaune.
5. On dispose les 52 cartes d'un jeu les unes à côté des autres faces cachées. On retourne les cartes l'une après l'autre jusqu'à obtenir l'as de pique. La variable aléatoire X désigne alors le nombre de cartes retournées.

Exercice 11. Soit $p \in]0,1[$. On considère une variable aléatoire X qui suit la loi $\mathscr{G}(p)$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\mathbb{P}(X > k)$.
2. Montrer que pour $s, t \in \mathbb{N}^\star$,
$$\mathbb{P}_{[X>s]}(X > s + t) = \mathbb{P}(X > t).$$
On dit alors que la loi géométrique est sans mémoire.
3. Soit X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^\star$ et X est sans mémoire. On cherche à montrer que X suit alors une loi géométrique.
    a. On pose $p = \mathbb{P}(X = 1)$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k$.
    b. En déduire $\mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, et conclure.

Exercice 12. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que, pour tout réel t, la variable aléatoire e^{tX} admet une espérance et la déterminer.

Exercice 13.

On suppose que le temps d'attente (en minutes) T d'un métro peut être modélisé par une loi géométrique. Le temps d'attente moyen d'un métro est de 2 minutes.

1. Quel paramètre choisir pour la loi géométrique de T ?
2. Quelle est la probabilité d'attendre un métro entre 2 et 4 minutes ?
3. Quelle est la probabilité d'attendre strictement plus de 5 minutes ?

Exercice 14. On considère une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements indépendants et on suppose que la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ diverge. On souhaite montrer qu'avec probabilité 1, au moins un des événements A_k est réalisé : en d'autres termes, on a $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $C_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$.

1. Montrer que $1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. *a.* Montrer que $\mathbb{P}(C_n) = 1 - \prod_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\overline{A}_k)$.
    b. En déduire que
$$\mathbb{P}(C_n) \geqslant 1 - \mathrm{e}^{-\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k)}.$$
    c. Montrer enfin que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_n) = 1$.
3. *a.* Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n \subset C_{n+1}$.
    b. Justifier que $\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k = \bigcup_{n=0}^{+\infty} C_n$, puis en déduire que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = 1$.

Exercice 15. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose
$$Y = 4\left\lfloor \frac{X}{2} \right\rfloor - 2X + 1.$$

1. Déterminer la loi de Y.
2. Calculer, si elles existent, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

1. On sait que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. On remarque que si $X = 2k$ est réalisé, pour $k \in \mathbb{N}$, alors $Y = 4k - 4k + 1 = 1$.
   Si $X = 2k+1$ est réalisé, alors $Y = 4\lfloor k + \frac{1}{2} \rfloor - 4k - 1 = 4k - 4k - 1 = -1$.
   Finalement, on a $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$. Par ailleurs, on a alors
   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = 1) &= \mathbb{P}(X \in 2\mathbb{N}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \mathrm{e}^{-\lambda}, \\ \mathbb{P}(Y = -1) &= \mathbb{P}(X \in 2\mathbb{N} + 1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} \mathrm{e}^{-\lambda}. \end{aligned}$$
2. L'espérance et la variance existent, car Y est une variable discrète finie. On a par ailleurs
   $$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \mathrm{e}^{-\lambda} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} \mathrm{e}^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^{2k}}{(2k)!} \mathrm{e}^{-\lambda} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^{2k+1}}{(2k+1)!} \mathrm{e}^{-\lambda} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^m}{(m)!} \mathrm{e}^{-\lambda} \end{aligned}$$
   Finalement, on a $\mathbb{E}(Y) = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-2\lambda}$.
   Par le théorème de transfert, on a
   $$\mathbb{E}(Y^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \mathrm{e}^{-\lambda} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} \mathrm{e}^{-\lambda} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\lambda^m}{(m)!} \mathrm{e}^{-\lambda} = 1.$$
   On en déduit que $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y) = 1 - \mathrm{e}^{-4\lambda}$.

Exercice 16. Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^\star$. On suppose que X admet une espérance, et on souhaite montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.

1. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} n\,\mathbb{P}(X > n) = 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(X = k) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k)\right) - n\,\mathbb{P}(X > n),$$
   et en déduire que la série $\sum \mathbb{P}(X > k)$ est convergente.
3. Montrer alors que
   $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k).$$