2. Nombres réels, équations, inéquations

Techniques de calcul

Exercice 1.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Factoriser les expressions suivantes :
   a. $9^{n+1} - 9^{n+2} - 3 \times 3^{2n}$.
   b. $\dfrac{2}{4^n} - 5 \times 2^{-2n-1} + 7 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}$.
   c. $3^{2n}(-1)^n - (-9)^n$.
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}^*$. Réduire $\dfrac{x^{-3}y^2}{(xy^{-1})^4}$.

Exercice 2. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\left(\sqrt{7-2\sqrt{6}} + \sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2$.
2. $\sqrt{4x^2 - 4x + 1}$.
3. $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.
4. $-\mathrm{e}^{-\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$.
5. $\ln\left(\sqrt{\exp(-\ln(\mathrm{e}^2))}\right)$.
6. $\exp\left(-\dfrac{1}{3}\ln(\mathrm{e}^{-3})\right)$.

Inégalités

Exercice 3. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^\star$ tels que $1 \leqslant x \leqslant y$. Montrer que

$$\frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \leqslant \sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2} \leqslant y.$$

Exercice 4.

1. Montrer que pour tous $x, y > 0$, $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$.
2. En déduire que pour tous $a, b, c > 0$, on a $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b} \geqslant \dfrac{3}{2}$.

   Indication : on pourra appliquer la question précédente aux dénominateurs.

> 1. On a $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} - 2 = \dfrac{x^2+y^2-2xy}{xy} = \dfrac{(x-y)^2}{xy} \geqslant 0$. Ainsi, $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$.
> 2. D'après la question précédente, on a $\dfrac{a+c}{b+c} + \dfrac{b+c}{a+c} \geqslant 2$, $\dfrac{a+b}{b+c} + \dfrac{b+c}{a+b} \geqslant 2$ et $\dfrac{a+c}{a+b} + \dfrac{a+b}{a+c} \geqslant 2$.
>   Si on somme ces trois inégalités, on obtient :
>
> $$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{c}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+c} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{b+c} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{a+b} + \frac{a}{a+b} + \frac{c}{a+b} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{a+c} &\geqslant 6 \\ 2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right) + 3 &\geqslant 6. \end{aligned}$$
>
>   Cette dernière inégalité donne bien $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b} \geqslant \dfrac{3}{2}$.

Exercice 5. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2} \geqslant 1$.

Équations, inéquations

Exercice 6. Étudier le signe des fonctions f et g sur leur ensemble de définition, où

$$f : x \mapsto (x^2+1)(2x-1)(\ln x + 1), \quad g : x \mapsto x^2\,\frac{4x^2 - 12x + 9}{9 - 25x^2}.$$

Exercice 7. Résoudre les équations suivantes :

1. $(x+1)(x^2-3x+1)-x^2+2x+3=0$
2. $32x^6-162x^2=0$
3. $8x^3-27=0$
4. $\dfrac{x+1}{x-1}=2$
5. $\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x-2}$
6. $\dfrac{x-1}{2x}=\dfrac{x}{2x-1}$
7. $\sqrt{x-1}=4$
8. $\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}=1$
9. $\sqrt{x^2+1}-3=0$
10. $\sqrt{x}+1=2x$
11. $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+2}=2$
12. $\ln(x+2)+\ln(x-2)=\ln(2x+11)$
13. $\ln(-x)=0$.
14. $e^{x^2+2x+1}=0$
15. $2e^{-x}-6e^{x}=1$

1. Les solutions sont -1 et 2.
2. Les solutions sont 0, $-\frac{3}{2}$ et $\frac{3}{2}$.
3. L'unique solution est $\frac{3}{2}$.
4. L'unique solution est 3.
5. Il n'y a pas de solution.
6. L'unique solution est $\frac{1}{3}$.
7. Il y a une seule solution : 17.
8. La seule solution est 0.
9. Les solutions sont $-2\sqrt{2}$ et $2\sqrt{2}$.
10. L'équation se récrit $\sqrt{x}=2x-1$. Elle n'est valide que si $x\geqslant 0$ et $2x-1\geqslant 0$, ce qui revient à dire que $x\in[\frac{1}{2},+\infty[$. Sur cet intervalle, l'équation est équivalente à $x=(2x-1)^2$, du fait que les deux membres sont positifs. On est ramené à résoudre $4x^2-5x+1=0$, dont les solutions sont 1 et $\frac{1}{4}$. Sur ces deux solutions, seule 1 est dans l'intervalle de validité, c'est donc la seule solution de l'équation de départ.

   N.B. On aurait pu aussi utiliser le changement de variable $y=\sqrt{x}$, et résoudre ainsi l'équation polynomiale $y+1=2y^2$, puis en déduire la solution.
11. Voir DM 2.
12. Le domaine de validité est $]2,+\infty[$. L'équation se récrit $\ln((x+2)(x-2))=\ln(2x+11)$, ou encore $(x+2)(x-2)=2x+11$ par stricte croissance de la fonction ln (ou en passant à l'exponentielle). Ainsi, on résout $x^2-2x-15=0$, dont les solutions sont -3 et 5. Comme -3 n'est pas dans le domaine de validité, la seule solution est 5.
13. La seule solution est -1.
14. Il n'y a pas de solution.
15. En multipliant par $e^x>0$, on remarque que l'équation se récrit $6e^{2x}+e^x-2=0$. On pose alors $y=e^x$, et l'équation équivaut à $\begin{cases} 6y^2+y-2 \\ y>0 \end{cases}$.

    Les racines de l'équation polynomiale sont $\frac{1}{2}$ et $-\frac{2}{3}$, donc la seule solution est $y=\frac{1}{2}$, ce qui donne $x=\ln y=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$.

Exercice 8. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $-3x+\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{2}{3}x+2$
2. $-x^2+6x-5<0$
3. $x^2-3x+2\geqslant x-2$
4. $(x-1)^2\leqslant 1$
5. $x^3-x^2-x-2<0$
6. $\dfrac{1}{x}<\dfrac{x}{2}$
7. $\dfrac{1-x^2}{2x-2}>\dfrac{3-x}{2}$
8. $\sqrt{x-3}\geqslant 4$
9. $\sqrt{x-3}\leqslant -1$
10. $2x+1\leqslant\sqrt{x^2+8}$
11. $\sqrt{x+1}>\sqrt{2x^2+x}$
12. $\ln^2(x)\geqslant 1$
13. $\ln(x)+\ln(x+1)>\ln 2$
14. $e^{-2x}-e^{-x}>0$
15. $e^{x^2}>3e^{x}$
16. $\dfrac{-x^2+3x-2}{4-3x}e^{x}\geqslant 0$

1. L'équation se récrit $\frac{11}{3}x + \frac{3}{2} \geqslant 0$, soit $x \geqslant \frac{9}{22}$. L'ensemble solution est donc $[\frac{9}{22}, +\infty[$.
2. Les racines du polynôme $-x^2 + 6x - 5$ sont 1 et 5, donc l'ensemble solution est $]-\infty, 1[\cup]5, +\infty[$.
3. L'équation se récrit $x^2 - 4x + 4 \geqslant 0$, soit $(x-2)^2 \geqslant 0$, qui est toujours vérifiée. On voit donc que les solutions sont tous les réels.
4. En passant à la racine, l'équation se récrit $|x-1| \leqslant 1$, soit $-1 \leqslant x-1 \leqslant 1$, ou encore $0 \leqslant x \leqslant 2$. L'ensemble solution est donc $[0, 2]$.

   On peut aussi développer, et ainsi récrire l'équation $x^2 - 2x \leqslant 0$, ce qui redonne le résultat.
5. Voir DM 2.
6. Le domaine de validité est $\mathbb{R}^\star$. En mettant les termes sur le même dénominateur, l'équation se récrit $\frac{x^2-2}{2x} > 0$. Un tableau de signe donne alors que l'ensemble solution est $]-\sqrt{2}, 0[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$.
7. Le domaine de validité est $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Par ailleurs, on a $\frac{1-x^2}{2x-2} = \frac{(1-x)(1+x)}{2(x-1)} = -\frac{1+x}{2}$, donc sur D l'équation se récrit $-\frac{1}{2} > \frac{3}{2}$, qui n'est jamais vraie. Il n'y a donc pas de solution.
8. Le domaine de validité est $[3, +\infty[$. Les deux membres étant positifs, on peut passer au carré, et l'équation équivaut à $x - 3 \geqslant 16$, ce qui se récrit $x \geqslant 19$. L'ensemble solution est $[19, +\infty[$.
9. Le domaine de validité est $D = [3, +\infty[$. Pour tout $x \in D$, $\sqrt{x-3} \geqslant 0$, donc $\sqrt{x-3} \leqslant -1$ n'est jamais vrai. Il n'y a donc pas de solution.
10. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 8 \geqslant 0$, donc le domaine de validité est $\mathbb{R}$. On note que $2x + 1 \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant -\frac{1}{2}$.
    - Si $x \in]-\infty, -\frac{1}{2}]$, on a $2x - 1 \leqslant 0 \leqslant \sqrt{x^2+8}$ donc l'équation est toujours vérifiée.
    - Si $x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$, alors l'équation se récrit $(2x-1)^2 \leqslant x^2 + 8$, ou encore $3x^2 + 4x - 7 \leqslant 0$. Les racines du polynôme étant 1 et $-\frac{7}{3}$, on en déduit que les solutions dans cet intervalle sont les réels dans $]-\frac{1}{2}, 1]$.

    Finalement, l'ensemble des solutions est $]-\infty, 1]$.
11. L'équation est valide si et seulement si $x \geqslant -1$, et $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [0, +\infty[$, du fait que $2x^2 + x = x(2x+1)$ a pour racine $-\frac{1}{2}$ et 0. Finalement, le domaine de validité est $D = \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \cup [0, +\infty[$.

    Comme les deux membres de l'inéquation sont positifs sur D, on peut élever au carré, et l'équation se récrit $x + 1 > 2x^2 + x$, c'est-à-dire $x^2 < \frac{1}{2}$, ce qui équivaut à $|x| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, soit $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

    Comme on résout dans D, l'ensemble des solutions est finalement $\left]-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$.
12. Le domaine de validité est $\mathbb{R}_+^\star$. Comme la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a
    $$\begin{aligned} \ln^2 \geqslant 1 &\Leftrightarrow |\ln x| \geqslant 1 \\ &\Leftrightarrow \ln x \leqslant -1 \text{ ou } \ln x \geqslant 1 \\ &\Leftrightarrow x \leqslant e^{-1} \text{ ou } x \geqslant e. \end{aligned}$$
    D'où l'ensemble des solutions : $\left]0, \frac{1}{e}\right] \cup [e, +\infty[$.
13. Le domaine de validité est $\mathbb{R}_+^\star$. L'équation est équivalente à $\ln\big(x(x+1)\big) > \ln 2$. Comme la fonction ln est strictement croissante, ceci équivaut à $x(x+1) > 2$, ou encore à $x^2 + x - 2 > 0$. Si $x \in \mathbb{R}_+^\star$, alors $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$ est du signe de $x - 1$. Par conséquent, l'ensemble des solutions est $]1, +\infty[$.

    Autre méthode : la fonction $x \mapsto \ln(x) + \ln(x+1)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ comme somme de fonctions strictement croissantes. Par conséquent, on a $f(x) > f(1) = \ln 2$ si et seulement si $x > 1$, d'où le résultat.
14. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} > 0$, on multiplie l'équation par e^{2x} : l'équation équivaut à $1 - e^x > 0$. L'ensemble des solutions est $]-\infty, 0[$.
15. Comme $3e^x > 0$, on peut récrire l'équation se récrit $e^{x^2-x} > 3$, ou encore $x^2 - x > \ln 3$ par stricte croissance de ln. Comme les racines de $x^2 - x - \ln 3$ sont $x_1 \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4\ln 3})$ et $x_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4\ln 3})$, l'ensemble des solutions est $]-\infty, x_1[\ \cup\ ]x_2, +\infty[$.
16. Le domaine de validité est $\mathbb{R} \setminus \{\frac{4}{3}\}$. On dresse un tableau de signe, et on obtient que l'ensemble des solutions est $\left[1, \frac{4}{3}\right[\cup [2, +\infty[$.

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$, selon les valeurs du paramètre réel m :

a. $x^2 - mx + 1 = 0$. *b.* $x^2 + m \geqslant (m+1)x$ *c.* $\frac{m}{x-1} \leqslant \frac{1}{x+2}$

a. On écrit le discriminant associé : $\Delta = m^2 - 4$. On distingue donc suivant les cas suivants :
- Si $m \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$, alors $\Delta > 0$, et l'équation a deux solutions, qui s'écrivent
$$\frac{m + \sqrt{m^2-4}}{2} \text{ et } \frac{m - \sqrt{m^2-4}}{2}.$$
- si $m \in \{-2, 2\}$, alors $\Delta = 0$, et l'équation admet une unique solution qui s'écrit $\frac{m}{2}$.
- Si $m \in]-2, 2[$, alors $\Delta < 0$, et l'équation n'a pas de solution.

b. Voir DM 2.

c. Le domaine de validité de l'inéquation est $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$. Sur D, l'inéquation se récrit

$$\frac{(m-1)x+2m+1}{(x-1)(x+2)} \leqslant 0.$$

On distingue alors les cas suivants.

– Si $m > 1$, alors on a $\frac{2m+1}{1-m} - (-2) = \frac{3}{1-m} < 0$, donc $\frac{2m+1}{1-m} < -2$. Ainsi, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{2m+1}{1-m}$		-2		1		$+\infty$
$(m-1)x+2m+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{(m-1)x+2m+1}{(x-1)(x+2)}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est donc $]-\infty, \frac{2m+1}{1-m}] \cup]-2, 1[$.

– Si $m = 1$, alors l'inéquation se récrit $\frac{3}{(x-1)(x+2)} \leqslant 0$. Comme $\frac{3}{(x-1)(x+2)}$ est du signe de $(x-1)(x+2)$, on en déduit que l'ensemble solution est $]-2, 1[$.

– Si $0 < m < 1$, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		1		$\frac{2m+1}{1-m}$		$+\infty$
$(m-1)x+2m+1$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{(m-1)x+2m+1}{(x-1)(x+2)}$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$		$-$	

car $\frac{2m+1}{1-m} - 1 = \frac{3m}{1-m} > 0$, donc $\frac{2m+1}{1-m} > 1$. L'ensemble des solutions est alors $]-2, 1[\cup [\frac{2m+1}{1-m}, +\infty[$.

– Si $m = 0$, alors l'inéquation se récrit $\frac{-x+1}{(x-1)(x+2)} \leqslant 0$, soit $\frac{1}{x+2} \geqslant 0$. Comme $\frac{1}{x+2}$ est du signe de $x+2$, l'ensemble des solutions est $]-2, 1[\cup]1, +\infty[$.

– Si $m < 0$, on a cette fois $0 < \frac{2m+1}{1-m} < 1$, d'où le tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		$\frac{2m+1}{1-m}$		1		$+\infty$
$(m-1)x+2m+1$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{(m-1)x+2m+1}{(x-1)(x+2)}$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$		$-$	

et l'ensemble des solutions est $]-2, \frac{2m+1}{1-m}] \cup]1, +\infty[$.

Exercice 10. Soit la fonction polynomiale P définie, pour tout réel x par
$P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$.

1. Calculer $P(1)$.
2. Déterminer des réels a, b, c tels que $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Résoudre alors l'équation $P(x) = 0$.
4. Résoudre l'équation (E) : $\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^{x} + 1 - 6\mathrm{e}^{-x} = 0$.

1. On a $P(1) = 0$, donc 1 est racine du polynôme P.
2. On peut procéder par identification : si $P(x) = P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$, alors $P(x) = ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$. En identifiant coefficient par coefficient, on obtient donc que

$$\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b - a = 4 \\ c - b = 1 \\ -c = -6 \end{array}\right. \quad \text{ce qui équivaut à} \quad \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 5 \\ c = 6 \end{array}\right.$$

Finalement, $P(x) = (x-1)(x^2+5x+6)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Le polynôme x^2+5x+6 a pour racines -3 et -2. Comme $P(x)=(x-1)(x^2+5x+6)$, on en déduit que l'équation $P(x)=0$ a trois solutions : -3, -2 et 1.
4. En multipliant l'équation par e^x (qui est strictement positif), on obtient que (E) équivaut à $\mathrm{e}^{3x}+4\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x-6=0$. Maintenant, en posant $y=\mathrm{e}^x$, on remarque que (E) se récrit $\left\{\begin{array}{l} y^3+4y^2+y-6=0 \\ y=\mathrm{e}^x \end{array}\right.$.
   Comme les trois solutions de $y^3+4y^2+y-6=0$ sont -3, -2 et 1, on en déduit que la seule solution de l'équation (E) correspond à $y=1$, les autres valeurs étant négatives. Finalement, la seule solution de (E) est alors $\ln 1=0$.

Valeur absolue

Exercice 11. Montrer que pour tout réel $x\in\left[\dfrac{3}{2},2\right]$, on a $\left|\dfrac{-2}{x^2}+\dfrac{1}{x}\right|\leqslant\dfrac{2}{9}$.

Voir DM 2.

Exercice 12. Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $f(x)=|x^2+x+1|-|2x^2-3x+1|$. En fonction des valeurs de $x\in\mathbb{R}$, écrire $f(x)$ sans valeur absolue.

On remarque pour commencer que le polynôme x^2+x+1 est de discriminant $-3<0$, donc x^2+x+1 est de signe constant, positif. Ainsi, $|x^2+x+1|=x^2+x+1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Par ailleurs, le polynôme $2x^2-3x+1$ a pour racines 1 et $\frac{1}{2}$, donc on en déduit que $2x^2-3x+1\left\{\begin{array}{ll} \leqslant 0 & \text{si } x\in\left[\frac{1}{2},1\right], \\ >0 & \text{sinon} \end{array}\right.$

Ainsi, $f(x)=\left\{\begin{array}{lcll} x^2+x+1-(-2x^2+3x-1) & = & 3x^2-2x+2 & \text{si } x\in\left[\frac{1}{2},1\right], \\ x^2+x+1-(2x^2-3x+1) & = & -x^2+4x & \text{sinon.} \end{array}\right.$

Exercice 13. Résoudre les équations suivantes.

$$|x+2|=3 \quad , \quad |x+3|=|-2x+5| \quad , \quad |x^2-4x+1|=3.$$
$$x+|x|=\frac{2}{x} \quad , \quad |4-x|=x.$$

Exercice 14. Résoudre les inéquations suivantes.

$$|2x+1|>5 \quad , \quad |x+3|\leqslant|-2x+5|,$$
$$|x^2-4x+1|\leqslant 3 \quad , \quad |x-1|<|2x+1|+1 \quad , \quad \sqrt{1-2x}=|x+7|.$$

– Résolution de $\sqrt{1-2x}=|x+7|$: le domaine de validité est $D=]-\infty,\frac{1}{2}]$. Si $x\in D$, comme les deux membres de l'équation sont positifs, l'équation équivaut à $1-2x=(x+7)^2$, soit $x^2+16x+48=0$. Les deux solutions sont -4 et -12. Comme ces deux solutions sont dans D, ce sont les deux seules solutions de l'équation $\sqrt{1-2x}=|x+7|$.

Exercice 15. Soient $x,y\in\mathbb{R}$. On souhaite démontrer l'inégalité triangulaire :

$$\big||y|-|x|\big| \leqslant |x+y| \leqslant |x|+|y|.$$

1. *a.* Montrer que $|x+y|\leqslant|x|+|y|$. On pourra commencer par élever au carré chacun des membres de l'inégalité.
   b. À quelle condition sur x et y l'inégalité est-elle une égalité ?
2. *a.* Montrer la deuxième inégalité : $\big||y|-|x|\big|\leqslant|x+y|$.
   b. À quelle condition sur x et y l'inégalité est-elle une égalité ?

Exercice 16. Montrer que : pour tout $x,y\geqslant 0$, $\quad\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|\leqslant\sqrt{|x-y|}$.

Exercice 17. Soit $x,y\in\mathbb{R}$. On note $\max(x,y)$ le maximum des deux réels x et y et $\min(x,y)$ leur minimum. Montrer que

$$\max(x,y)=\frac{x+y+|x-y|}{2} \qquad \min(x,y)=\frac{x+y-|x-y|}{2}.$$