20. Comparaison locale des fonctions et développements limités

Exercice 1. Déterminer des équivalents simples des fonctions suivantes aux voisinages précisés.

1. $x \mapsto \dfrac{x^3+4x+1}{5^3+2x}$ en 0 et et $+\infty$.
2. $x \mapsto \dfrac{x\,(\ln(1+x))^2}{3x+4}$ en 0.
3. $x \mapsto \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$ en 0.
4. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}{(1+x)^5-1}$ en 0^+.
5. $x \mapsto \sin(2x^2)+\cos(3x)-1$ en 0.

Exercice 2. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1}$.

Exercice 3. Déterminer les limites suivantes à l'aide d'équivalents.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\,(3+x)\,\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin\left(\sqrt{x}\right)}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-\mathrm{e}^x)\,(1-\cos x)}{2x^3+5x^5}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 4. Dans chacun des cas suivants, déterminer le développement limité de f à l'ordre n au point a.

1. $f : x \mapsto \mathrm{e}^x\,(1+x)$, pour $n=3$, $a=0$.
2. $f : x \mapsto \ln(1+x)\sin x$, pour $n=5$, $a=0$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x-\cos x}{x}$ pour $n=3$, $a=0$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}}{1-x^2}$ pour $n=3$, $a=0$.
5. $f : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{1-x^3}$ pour $n=7$, $a=0$.
6. $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ pour $n=2$, $a=1$.

Exercice 5. Déterminer les limites suivantes en 0 à l'aide d'un développement limité.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1+x-\mathrm{e}^x}{x^2}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\,(2+\cos x)-3\sin x}{x^3\,(1-\cos x)}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x}$ où $a,b>0$.

Exercice 6. Déterminer la nature des séries de terme général u_n dans chacun des cas suivants.

1. $u_n = n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
2. $u_n = \mathrm{e}^{-3/n}-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)+3\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 7. Déterminer les extrema locaux de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x + x\,(\ln(x)-1-\mathrm{e})$.

Exercice 8. Déterminer la position locale de la courbe de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ par rapport à sa tangente en 0.

Exercice 9. Soit la fonction $f : x \mapsto -\dfrac{(1-x)\ln(1-x)}{x}$ définie sur $]0,1[$.

1. Donner un développement limité de la fonction $g : x \mapsto (1-x)\ln(1-x)$ à l'ordre 3 en 0.
2. En déduire un développement limité de f à l'ordre 2 en 0.
3. Justifier que f est prolongeable en une fonction dérivable en 0 et déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0. On étudiera la position de la courbe par rapport à la tangente.

Exercice 10. On considère la fonction $f : x \mapsto (x+1)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$ dont on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative.

1. Étudier l'existence d'asymptote à $\mathscr{C}_f$, ainsi que la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à celles-ci.

2. Terminer l'étude, et donner l'allure de $\mathscr{C}_f$.

Exercice 11.

1. Montrer que la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto (x-2)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^\star$ admet une asymptote oblique en $+\infty$.
2. Etudier la position de la courbe par rapport à l'asymptote au voisinage de $+\infty$.