20. Comparaison locale des fonctions et développements limités

Exercice 1. Déterminer des équivalents simples des fonctions suivantes aux voisinages précisés.

1. $x \mapsto \dfrac{x^3+4x+1}{5^3+2x}$ en 0 et et $+\infty$.
2. $x \mapsto \dfrac{x\,(\ln(1+x))^2}{3x+4}$ en 0.
3. $x \mapsto \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$ en 0.
4. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}{(1+x)^5-1}$ en 0^+.
5. $x \mapsto \sin(2x^2)+\cos(3x)-1$ en 0.

Exercice 2. Calculer $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x^2-1}$.

Exercice 3. Déterminer les limites suivantes à l'aide d'équivalents.

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,(3+x)\,\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin\left(\sqrt{x}\right)}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\mathrm{e}^x)\,(1-\cos x)}{2x^3+5x^5}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

1. Au voisinage de 0, on a $x\,(3+x)\,\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin\left(\sqrt{x}\right)} \sim x\times 3\times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}} = 3\sqrt{3}$.
   La limite cherchée est donc $3\sqrt{3}$.
2. Au voisinage de 0, $\frac{(1-\mathrm{e}^x)(1-\cos x)}{2x^3+5x^5} \sim \frac{-x\left(\frac{x^2}{2}\right)}{2x^3} = -\frac{1}{4}$, donc la limite vaut $-\frac{1}{4}$.
3. On a $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$. Or $\frac{1}{x}\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}x = 1$, donc $\frac{1}{x}\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.
   Ainsi, par composition de limites, $(1+x)^{\frac{1}{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{e}$.

Exercice 4. Dans chacun des cas suivants, déterminer le développement limité de f à l'ordre n au point a.

1. $f : x \mapsto \mathrm{e}^x\,(1+x)$, pour $n=3$, $a=0$.
2. $f : x \mapsto \ln(1+x)\sin x$, pour $n=5$, $a=0$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x-\cos x}{x}$ pour $n=3$, $a=0$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}}{1-x^2}$ pour $n=3$, $a=0$.
5. $f : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{1-x^3}$ pour $n=7$, $a=0$.
6. $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ pour $n=2$, $a=1$.

1.
$$\begin{aligned}\mathrm{e}^x\,(1+x) &= \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)(1+x)\\ &= 1+2x+\frac{3}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\mathrm{o}\left(x^3\right).\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}\ln(1+x)\sin x &= \left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\\ &= x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6}-\frac{x^5}{6}+\mathrm{o}\left(x^5\right).\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^x-\cos x}{x} &= \frac{1}{x}\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\\ &= 1+x+\frac{x^2}{6}+\mathrm{o}\left(x^3\right).\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+x}}{1-x^2} &= \left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)\left(1+x^2+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)\\ &= 1+\frac{x}{2}+\frac{7x^2}{8}+\frac{9x^3}{16}+\mathrm{o}\left(x^3\right).\end{aligned}$$

5.
$$x\,\mathrm{e}^{1-x^3} = \mathrm{e}\,x\,\mathrm{e}^{-x^3} = \mathrm{e}\,x\left(1-x^3+\frac{x^6}{2}+\mathrm{o}\left(x^6\right)\right) = \mathrm{e}\,x\left(x-x^4+\frac{x^7}{2}+\mathrm{o}\left(x^7\right)\right).$$

6. *1ère méthode* : on pose $h = x-1$, ce qui donne $1+x = 2+h$. Or pour h au voisinage de 0,

$$\begin{aligned}\frac{\ln(2+h)}{2+h} &= \frac{\ln 2 + \ln\left(1+\frac{h}{2}\right)}{2\left(1+\frac{h}{2}\right)}\\ &= \frac{1}{2}\left(\ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \mathrm{o}\left(h^2\right)\right)\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + \mathrm{o}\left(h^2\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\ln 2 + \frac{1-\ln 2}{2}\,h + \frac{2\ln 2 - 3}{8}\,h^2 + \mathrm{o}\left(h^2\right)\right).\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\frac{\ln(1+x)}{1+x} \underset{x\to 1}{=} \frac{\ln 2}{2} + \frac{1-\ln 2}{4}(x-1) + \frac{2\ln 2-3}{16}(x-1)^2 + \mathrm{o}\left((x-1)^2\right)$.

Exercice 5. Déterminer les limites suivantes en 0 à l'aide d'un développement limité.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1+x-\mathrm{e}^x}{x^2}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\,(2+\cos x) - 3\sin x}{x^3\,(1-\cos x)}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$ où $a, b > 0$.

Exercice 6. Déterminer la nature des séries de terme général u_n dans chacun des cas suivants.

1. $u_n = n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
2. $u_n = \mathrm{e}^{-3/n} - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right) + 3\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

1. On a $u_n \underset{n\to+\infty}{=} n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - (1+\mathrm{o}(1)) = -\frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

   Ainsi, $u_n \sim -\frac{1}{2n}$. Ainsi, par comparaison avec la SATP divergente $\sum_n \frac{1}{n}$, on en déduit que $\sum_n u_n$ diverge.
2. On a $u_n = 1 - \frac{3}{n} + \frac{9}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{3}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{5}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi, $u_n \sim \frac{5}{n^2}$, et par comparaison avec la SATP convergente $\sum_n \frac{1}{n^2}$, on en déduit que la série $\sum_n u_n$ converge.

Exercice 7. Déterminer les extrema locaux de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x + x\,(\ln(x) - 1 - \mathrm{e})$.

Exercice 8. Déterminer la position locale de la courbe de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ par rapport à sa tangente en 0.

Exercice 9. Soit la fonction $f : x \mapsto -\dfrac{(1-x)\ln(1-x)}{x}$ définie sur $]0,1[$.

1. Donner un développement limité de la fonction $g : x \mapsto (1-x)\ln(1-x)$ à l'ordre 3 en 0.
2. En déduire un développement limité de f à l'ordre 2 en 0.
3. Justifier que f est prolongeable en une fonction dérivable en 0 et déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0. On étudiera la position de la courbe par rapport à la tangente.

Exercice 10. On considère la fonction $f : x \mapsto (x+1)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$ dont on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative.

1. Étudier l'existence d'asymptote à $\mathscr{C}_f$, ainsi que la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à celles-ci.
2. Terminer l'étude, et donner l'allure de $\mathscr{C}_f$.

1. Comme $\frac{1}{x-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut utiliser le DL de exp au voisinage de 0 :

$$(x+1)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}} = (x+1)\left(1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right).$$

Or on a $\displaystyle\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x}\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Comme on a aussi $\displaystyle\frac{1}{2(x-1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x^2}$, on obtient

$$\begin{aligned}(x+1)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}} &= (x+1)\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\ &= x + 2 + \frac{5}{2x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, la droite d'équation $y = x+2$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Par ailleurs, comme $\frac{5}{2x} > 0$ au voisinage de $+\infty$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de son asymptote.

Les calculs ci-dessus sont valables au voisinage de $-\infty$. On obtient donc que la courbe a la même asymptote au voisinage de $-\infty$. Comme $\frac{5}{2x} < 0$ au voisinage de $-\infty$, on en déduit que $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de son asymptote.

Étude au voisinage de 1. On a $\frac{1}{x-1} \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $\frac{1}{x-1} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} -\infty$, donc

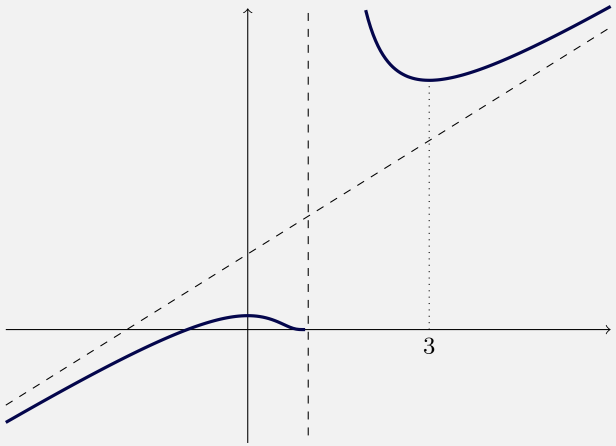
$$f(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} +\infty, \quad \text{et} \quad \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, la droite $x = 1$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$. Par ailleurs, f est prolongeable par continuité en 1^- (par 0).

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$f'(x) \;=\; \mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}} - \frac{x+1}{(x-1)^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}} \;=\; \frac{x^2-3x}{(x-1)^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}} \;=\; \frac{x\,(x-3)}{(x-1)^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}.$$

On en déduit les variations de f sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, ce qui permet le tracé suivant.



Exercice 11.

1. Montrer que la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto (x-2)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^\star$ admet une asymptote oblique en $+\infty$.
2. Etudier la position de la courbe par rapport à l'asymptote au voisinage de $+\infty$.