# 21. Applications linéaires

**Exercice 1**. Dans chacun des cas suivants, déterminer si $\varphi$ est linéaire. Si c'est le cas, déterminer son noyau.

1. $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x-3 \end{array}$
2. $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x-3y \end{array}$
3. $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$
4. $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y,\, y-z) \end{array}$
5. $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y)(y-z) \end{array}$
6. $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sqrt{x^2+y^2} \end{array}$
7. $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x] & \to & \mathbb{R}[x] \\ P & \mapsto & P+P' \end{array}$
8. $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R} \\ (u_n)_n & \mapsto & u_0+u_1 \end{array}$
9. $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 2**.

1. Soit $f$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :
$$f(1,0,0) = (1,1), \quad f(0,1,0) = (0,1) \quad \text{et} \quad f(0,0,1) = (-1,1).$$
   *a.* Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f(x,y,z)$.
   *b.* Déterminer le noyau de $f$.
2. Déterminer le noyau de $g : (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto (x+y+z+t,\, x-y+z-t,\, y+t)$.
3. Déterminer l'image de $h : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (3x-y,\, x+y,\, x-y)$.

**Exercice 3**. Déterminer l'image et le rang de l'application linéaire $\varphi$ dans chacun des cas suivants.

1. $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z,\, x-y) \end{array}$.
2. $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_4[x] & \to & \mathbb{R}_2[x] \\ P & \mapsto & P'' \end{array}$.
3. $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - 2\,{}^tM \end{array}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

**Exercice 4**. Soient $E$ et $F$ des espaces vectoriels de dimension finie.

1. Soient $f, g$ deux applications linéaires de $E$ dans $F$.
   *a.* Justifier que $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)$.
   *b.* En déduire que $\operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$.
   *c.* Montrer que $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Ker}(g) \subset \operatorname{Ker}(f+g)$.
2. Soit $\varphi$ un endormophisme de $E$. Montrer que $\operatorname{Im}(\varphi) = \operatorname{Im}\left(\varphi^2\right)$ si et seulement si $\operatorname{Ker}(\varphi) = \operatorname{Ker}\left(\varphi^2\right)$.

**Exercice 5**. Soient les vecteurs $u_1 = (1,2,1), u_2 = (0,1,0)$ et $u_3 = (0,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$. On note $F = \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$ et $G = \operatorname{Vect}(u_3)$.

1. Justifier que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
2. Expliciter le projecteur sur $F$ parallèlement à $G$.

**Exercice 6**. Montrer que $p : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (-y-z,\, x+2y+z,\, -x-y)$ est un projecteur. Préciser sur quel sous-espace vectoriel, et parallèlement auquel.

**Exercice 7**. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto & \big(P(-1), P(0), P(1), P(2)\big). \end{array}$

1. Montrer que $\varphi$ est linéaire.
2. Montrer que $\varphi$ est un isomorphisme.
3. En déduire qu'il existe un unique polynôme $Q$ de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que $Q(-1) = 0$, $Q(0) = Q(1) = 3$ et $Q(2) = 1$.

**Exercice 8**. Soient $f$ et $g$ deux endormorphismes de $E$. On dit qu'un sous-espace vectoriel $F$ de $E$ est stable par $f$ si :
$$\forall u \in F, \quad f(u) \in F.$$

1. Montrer que si $f$ et $g$ commutent alors $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$ sont stables par $f$.
2. Montrer que si $g$ est un projecteur, alors la réciproque est vraie.
   *Indication : si $g$ est un projecteur, on se rappelle que $E = \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} g$.*

**Exercice 9**. Soient $p$ et $q$ deux projecteurs de $E$. On pose $f = p + q \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$ si et seulement si $f$ est un projecteur.
2. Dans cette question, on suppose que $f$ est un projecteur.
   *a.* Etablir que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(p) \cap \operatorname{Ker}(q)$.
   *b.* Montrer que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Im}(q)$.

**Exercice 10**.

1. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E$ avec $u \neq 0_E$ tels que $p(u) = \lambda u$. Montrer que $\lambda \in \{0, 1\}$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit les applications :

$$p_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \frac{1}{a^2+1}\,(x + ay,\, ax + a^2 y), \end{array} \qquad q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \frac{1}{2}\,(x + y,\, x + y). \end{array}$$

   *a.* Montrer que les applications $p_a$ et $q$ sont des projecteurs.
   *b.* Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(p_a)$.
   *c.* Montrer que $(p_a \circ q)\,(1, a) = \alpha\,(1, a)$, où $\alpha$ est un réel qu'on exprimera en fonction de $a$.
   *d.* En déduire la ou les valeurs de $a$ pour lesquelles $p_a \circ q$ est un projecteur.

**Exercice 11**. Le but de cet exercice est de faire l'étude des symétries comme celle des projecteurs.

Soient $E$ un espace vectoriel et $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E$. Ainsi pour tout $u \in E$, il existe un unique couple $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que $u = u_F + u_G$. On définit alors la symétrie $s$ par rapport à $F$ parallèlement à $G$ par :

$$s : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u & \mapsto & u_F - u_G. \end{array}$$

1. Justifier que $s$ est une application linéaire.
2. Donner la symétrie par rapport à $\operatorname{Vect}((1,1))$ parallèlement à $\operatorname{Vect}((1,-1))$.
3. *a.* Prouver que $G = \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_E)$ et $F = \operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_E)$.
   *b.* Soit $p$ le projecteur sur $F$ parallèlement à $G$. Vérifier que $s = 2p - \operatorname{Id}_E$.
4. Soit $f$ une application de $E$ dans $E$. Montrer que $f$ est une symétrie si et seulement si $f$ est linéaire et $f \circ f = \operatorname{Id}_E$.
5. En déduire qu'une symétrie est un automorphisme et déterminer son application réciproque.
6. Vérifier que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \frac{1}{3}\,(x + 4y,\, 2x - y) \end{array}$ est une symétrie.

**Exercice 12**. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q$ tel que pour tout réel $x$, $x^n = Q(x+1) + x\,Q''(x)$. On ne cherchera pas à déterminer $Q$.

**Exercice 13**. Soit $p$ un projecteur d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$.

1. Montrer que pour tout $v \in \operatorname{Im} p$, $p(v) = v$.

Soit $q$ un autre projecteur de $E$ tel que $p \circ q = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

2. Montrer que $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur de $E$.

Le but est maintenant de montrer que $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ et $\operatorname{Ker} r = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

3. *a.* Montrer tout d'abord que $\operatorname{Im} r \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.
   *b.* Soit $v = a + b \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ avec $a \in \operatorname{Im} p$ et $b \in \operatorname{Im} q$. Montrer que $a = p(v)$ et en déduire que $b = v - p(v)$.
   *c.* Déduire de la question précédente que $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} r$.
4. Montrer que $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} r$.
5. Soit $u \in \operatorname{Ker} r$. En remarquant que $p^2(u) = p(u)$, montrer que $u \in \operatorname{Ker} p$.
6. Conclure.

**Exercice 14**. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. On note : Id l'application identité de $\mathbb{R}^2$ et $0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)}$ l'application nulle de $\mathbb{R}^2$.

Le but de cet exercice est de trouver tous les couples d'endomorphismes $(\varphi, \psi)$ tels que $\varphi, \psi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ vérifient les quatre propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \varphi^2 = -\operatorname{Id}, \\ \psi \neq \operatorname{Id}, \\ (\psi - \operatorname{Id})^2 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)}, \\ \ker(\varphi + \psi - \operatorname{Id}) \neq \{0_{\mathbb{R}^2}\}. \end{cases} \qquad (P)$$

1. *Étude d'un exemple.* On introduit les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$\varphi : (x, y) \mapsto (-y, x), \qquad \psi : (x, y) \mapsto (x + y, y).$$

   Montrer que le couple $(\varphi, \psi)$ vérifie les quatre propriétés de $(P)$.

2. *Cas général.* Nous revenons au cas général, et considérons dans toute la suite un couple $(\varphi, \psi)$ qui vérifie $(P)$.
   *a.* Justifier que $\dim\big(\ker(\varphi + \psi - \mathrm{Id})\big) \in \{1, 2\}$.
   *b.* Montrer que si $\dim\big(\ker(\varphi + \psi - \mathrm{Id})\big) = 2$, alors $\varphi = -(\psi - \mathrm{Id})$.
   *c.* En déduire que $\dim\big(\ker(\varphi + \psi - \mathrm{Id})\big) = 1$.
   *d.* On considère $u_2 \in \ker(\varphi + \psi - \mathrm{Id})$ tel que $u_2 \neq 0_{\mathbb{R}^2}$. Justifier que $(u_2)$ est une base de $\ker(\varphi + \psi - \mathrm{Id})$.
3. On pose $u_1 = -\varphi(u_2)$, où $u_2$ est le vecteur introduit dans la question précédente.
   *a.* Montrer que $(u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   *b.* Calculer $\varphi(u_1)$ en fonction de $u_2$.
   *c.* Calculer $\psi(u_2)$ puis $\psi(u_1)$ en fonction de $u_1$ et $u_2$.
   *d.* Pour $x, y \in \mathbb{R}$, en déduire $\varphi(xu_1 + yu_2)$ et $\psi(xu_1 + yu_2)$ en fonction de $x, y$, $u_1$ et $u_2$.