21. Applications linéaires

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, déterminer si φ est linéaire. Si c'est le cas, déterminer son noyau.

1. $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x-3 \end{array}$
2. $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x-3y \end{array}$
3. $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$
4. $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y,\ y-z) \end{array}$
5. $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y)(y-z) \end{array}$
6. $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sqrt{x^2+y^2} \end{array}$
7. $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x] & \to & \mathbb{R}[x] \\ P & \mapsto & P+P' \end{array}$
8. $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R} \\ (u_n)_n & \mapsto & u_0+u_1 \end{array}$
9. $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On a $\varphi(0,0) \neq 0$, donc φ n'est pas linéaire.
2. φ est linéaire : si $u=(x,y)$ et $v=(x',y')$ sont dans $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
$$\begin{aligned} \varphi(\lambda u+v) = \varphi(\lambda x+x', \lambda y+y') &= (\lambda x+x'-3(\lambda y+y')) \\ &= \lambda(x-3y)+(x'-3y') \\ &= \lambda\varphi(u)+\varphi(v). \end{aligned}$$
$\ker\varphi = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x-3y=0\} = \{(3y,y),\ y\in\mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,((3,1))$.
3. On a $\varphi(1)=\varphi(-1)=1$, donc $\varphi(1)+\varphi(-1)\neq\varphi(0)$, et φ n'est pas linéaire.
4. On vérifie que φ est linéaire. On a $\ker\varphi = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x+2y=y-z=0\}$.
$$\left\{\begin{array}{l} x+2y=0 \\ y-z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{x}=-2y \\ \boxed{y}=z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{x}=-2z \\ \boxed{y}=z \end{array}\right.$$
Ainsi, $\ker\varphi = \{(-2z,z,z),\ z\in\mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,((-2,1,1))$.
5. On a $\varphi(2,2,0)=12$ et $\varphi(1,1,0)=3$, donc $\varphi(2,2,0)\neq 2\varphi(1,1,0)$, et φ n'est pas linéaire.
6. On a $\varphi(1,1)=\varphi(1,-1)=\sqrt{2}$, donc $\varphi(2,0)=2\neq\varphi(1,1)+\varphi(1,-1)$, donc φ n'est pas linéaire.
7. L'application φ est linéaire comme somme d'applications linéaires. Par ailleurs, $P\in\ker\varphi$ ssi $P+P'=0_{\mathbb{R}[x]}$, c'est-à-dire $P=-P'$. Comme on sait que P et P' n'ont même degré que lorsque P est nul, on en déduit que $\ker\varphi=\{0_{\mathbb{R}[x]}\}$.
8. On vérifie que φ est linéaire. Par ailleurs, $\ker\varphi = \{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u_1=-u_0\}$.
9. On vérifie que φ est linéaire. Par ailleurs,
$$\text{si } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \text{ alors } AM = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ c & d \end{pmatrix}.$$
Ainsi, $AM = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ ssi $c=d=0$. On obtient
$$\ker\varphi = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ a,b\in\mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Exercice 2.

1. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :
$$f(1,0,0)=(1,1), \quad f(0,1,0)=(0,1) \quad \text{et} \quad f(0,0,1)=(-1,1).$$
   a. Pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, déterminer $f(x,y,z)$.
   b. Déterminer le noyau de f.
2. Déterminer le noyau de $g : (x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mapsto (x+y+z+t,\ x-y+z-t,\ y+t)$.
3. Déterminer l'image de $h : (x,y)\in\mathbb{R}^2 \mapsto (3x-y,\ x+y,\ x-y)$.

1. *a.* On note (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, comme $(x,y,z)=xe_1+ye_2+ze_3$, on a
$$\begin{aligned} f(x,y,z) = xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3) &= x\,(1,1)+y\,(0,1)+z\,(-1,1) \\ &= (x-z,\ x+y+z). \end{aligned}$$
   b. On a $f(x,y,z)=0_{\mathbb{R}^3}$ ssi $\left\{\begin{array}{l} x-z=0 \\ x+y+z=0 \end{array}\right.$, *i.e.* $\left\{\begin{array}{l} x-z=0 \\ y+2z=0 \end{array}\right.$.
   Ainsi, $\ker f = \{(z,-2z,z),\ z\in\mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,((1,-2,1))$.

2. On cherche $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $g(x,y,z,t) = 0_{\mathbb{R}^3}$, c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 0 \\ x-y+z-t & = & 0 \\ y+\quad t & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 0 \\ -2y\quad -2t & = & 0 \\ y+\quad t & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -z \\ y & = & -t \end{array}\right.$$

Ainsi, $\ker g = \{(z,-t,-z,t),\ z,t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,((1,0,-1,0),\,(0,-1,0,1))$.

3. On a $\mathrm{Im}\,h = \mathrm{Vect}\,((h(1,0),\,h(0,1)) = \mathrm{Vect}\,((3,1,1),\,(-1,1,-1))$.

Exercice 3. Déterminer l'image et le rang de l'application linéaire φ dans chacun des cas suivants.

1. $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z,\, x-y) \end{array}$.
2. $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_4[x] & \to & \mathbb{R}_2[x] \\ P & \mapsto & P'' \end{array}$.
3. $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - 2\,{}^tM \end{array}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie.

1. Soient f,g deux applications linéaires de E dans F.
   a. Justifier que $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.
   b. En déduire que $\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
   c. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f+g)$.
2. Soit φ un endormophisme de E. Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Im}\left(\varphi^2\right)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}\left(\varphi^2\right)$.

1. *a.* Soit $v \in \mathrm{Im}(f+g)$, on sait qu'il existe $u \in E$ tel que $(f+g)(u) = v$, c'est-à-dire $f(u)+g(u) = v$. Ainsi, $v \in \mathrm{Im}\,f + \mathrm{Im}\,g$. On a donc bien montré $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}\,f + \mathrm{Im}\,g$.
   b. D'après la question précédente, on a $\dim(\mathrm{Im}(f+g)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}\,f + \mathrm{Im}\,g)$. Or, par la formule de Grassmann, on a

$$\begin{array}{rcl} \dim(\mathrm{Im}\,f + \mathrm{Im}\,g) & = & \dim(\mathrm{Im}\,f) + \dim(\mathrm{Im}\,g) - \dim(\mathrm{Im}\,f \cap \mathrm{Im}\,g) \\ & \leqslant & \dim(\mathrm{Im}\,f) + \dim(\mathrm{Im}\,g). \end{array}$$

Ainsi, $\dim(\mathrm{Im}(f+g)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}\,f) + \dim(\mathrm{Im}\,g)$, et $\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}\,f + \mathrm{rg}\,g$.

   c. Si $u \in \ker f \cap \ker g$, alors $(f+g)(u) = f(u) + g(u) = 0_E$, et on a bien $u \in \ker(f+g)$. Ainsi, $\ker f \cap \ker g \subset \ker(f+g)$.
2. Le théorème du rang donne

$$\dim E = \dim\ker\varphi + \dim\mathrm{Im}\,\varphi = \dim\ker\varphi^2 + \dim\mathrm{Im}\,\varphi^2.$$

On en déduit que $\dim\mathrm{Im}\,\varphi = \dim\mathrm{Im}\,\varphi^2$ ssi $\dim\ker\varphi = \dim\ker\varphi^2$. Comme $\mathrm{Im}\,\varphi^2 \subset \mathrm{Im}\,\varphi$, et $\ker\varphi \subset \ker\varphi^2$, on a

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Im}\,\varphi^2 & \Leftrightarrow & \dim\mathrm{Im}\,\varphi = \dim\mathrm{Im}\,\varphi^2 \\ & \Leftrightarrow & \dim\ker\varphi = \dim\ker\varphi^2 \\ & \Leftrightarrow & \ker\varphi = \ker\varphi^2. \end{array}$$

Exercice 5. Soient les vecteurs $u_1 = (1,2,1), u_2 = (0,1,0)$ et $u_3 = (0,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$. On note $F = \mathrm{Vect}\,(u_1,u_2)$ et $G = \mathrm{Vect}\,(u_3)$.

1. Justifier que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
2. Expliciter le projecteur sur F parallèlement à G.

Exercice 6. Montrer que $p : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (-y-z,\, x+2y+z,\, -x-y)$ est un projecteur. Préciser sur quel sous-espace vectoriel, et parallèlement auquel.

Exercice 7. Soit $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto & \big(P(-1), P(0), P(1), P(2)\big) \end{array}$.

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Montrer que φ est un isomorphisme.
3. En déduire qu'il existe un unique polynôme Q de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que $Q(-1) = 0$, $Q(0) = Q(1) = 3$ et $Q(2) = 1$.

Exercice 8. Soient f et g deux endormorphismes de E. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par f si :

$$\forall u \in F, \quad f(u) \in F.$$

1. Montrer que si f et g commutent alors $\mathrm{Ker}\,g$ et $\mathrm{Im}\,g$ sont stables par f.

2. Montrer que si g est un projecteur, alors la réciproque est vraie.
   Indication : si g est un projecteur, on se rappelle que $E = \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} g$.

1. – Soit $u \in \operatorname{Ker} g$, c'est-à-dire que $g(u) = 0_E$. Comme $g \circ f = f \circ g$, on a $g(f(u)) = f(g(u)) = f(0_E) = 0_E$. Ainsi, $f(u) \in \operatorname{Ker} g$. On a donc montré que $\operatorname{Ker} g$ est stable par f.
   – Soit $v \in \operatorname{Im} g$. Il existe alors $u \in E$ tel que $v = g(u)$. Par conséquent, $f(v) = f(g(u)) = g(f(u))$, donc $f(v) \in \operatorname{Im} g$. On a bien montré que $\operatorname{Im} g$ est stable par f.
2. On suppose que g est un projecteur, on a alors $g \circ g = g$.
   – Si $u \in \operatorname{Ker} g$, on sait que $f(u) \in \operatorname{Ker} g$, c'est-à-dire que $g(f(u)) = 0_E$. Ainsi, comme $f(g(u)) = f(0_E) = 0_E$, on a $f(g(u)) = g(f(u))$.
   – Si $v \in \operatorname{Im} g$, on a $g(v) = v$ car g est un projecteur (il existe $u \in E$ tel que $v = g(u)$, donc $g(v) = g(g(u)) = g(u) = v$). Comme $\operatorname{Im} g$ est stable par f, on a aussi $f(v) \in \operatorname{Im} g$, donc $g(f(v)) = f(v)$.
   Ainsi, $f(g(v)) = f(v) = g(f(v))$.

   Soit $u \in E$. Comme g est un projecteur, on a $E = \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} g$, donc il existe $u_1 \in \operatorname{Ker} g$ et $u_2 \in \operatorname{Im} g$ tels que $u = u_1 + u_2$. D'après la question précédente,

$$g(f(u)) \;=\; g(f(u_1)) + g(f(u_2)) \;=\; f(g(u_1)) + f(g(u_2)) \;=\; f(g(u)).$$

   On a donc bien montré que $f \circ g = g \circ f$.

Exercice 9. Soient p et q deux projecteurs de E. On pose $f = p + q \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$ si et seulement si f est un projecteur.
2. Dans cette question, on suppose que f est un projecteur.
   a. Etablir que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(p) \cap \operatorname{Ker}(q)$.
   b. Montrer que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Im}(q)$.

Exercice 10.

1. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E$ avec $u \neq 0_E$ tels que $p(u) = \lambda u$. Montrer que $\lambda \in \{0, 1\}$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit les applications :

$$p_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \frac{1}{a^2+1}\,(x + ay,\, ax + a^2 y), \end{array} \qquad q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \frac{1}{2}\,(x + y,\, x + y). \end{array}$$

   a. Montrer que les applications p_a et q sont des projecteurs.
   b. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(p_a)$.
   c. Montrer que $(p_a \circ q)(1, a) = \alpha\,(1, a)$, où α est un réel qu'on exprimera en fonction de a.
   d. En déduire la ou les valeurs de a pour lesquelles $p_a \circ q$ est un projecteur.

Exercice 11. Le but de cet exercice est de faire l'étude des symétries comme celle des projecteurs.

Soient E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Ainsi pour tout $u \in E$, il existe un unique couple $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que $u = u_F + u_G$. On définit alors la symétrie s par rapport à F parallèlement à G par :

$$s \;:\; \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u & \mapsto & u_F - u_G. \end{array}$$

1. Justifier que s est une application linéaire.
2. Donner la symétrie par rapport à $\operatorname{Vect}((1,1))$ parallèlement à $\operatorname{Vect}((1,-1))$.
3. *a.* Prouver que $G = \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_E)$ et $F = \operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_E)$.
   b. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Vérifier que $s = 2p - \operatorname{Id}_E$.
4. Soit f une application de E dans E. Montrer que f est une symétrie si et seulement si f est linéaire et $f \circ f = \operatorname{Id}_E$.
5. En déduire qu'une symétrie est un automorphisme et déterminer son application réciproque.
6. Vérifier que $f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \frac{1}{3}\,(x + 4y,\, 2x - y) \end{array}$ est une symétrie.

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer qu'il existe un unique polynôme Q tel que pour tout réel x, $x^n = Q(x+1) + x\,Q''(x)$. On ne cherchera pas à déterminer Q.

Exercice 13. Soit p un projecteur d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que pour tout $v \in \operatorname{Im} p$, $p(v) = v$.

Soit q un autre projecteur de E tel que $p \circ q = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

2. Montrer que $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur de E.

Le but est maintenant de montrer que $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ et $\operatorname{Ker} r = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

3. *a.* Montrer tout d'abord que $\operatorname{Im} r \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.

   b. Soit $v = a+b \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ avec $a \in \operatorname{Im} p$ et $b \in \operatorname{Im} q$. Montrer que $a = p(v)$ et en déduire que $b = v - p(v)$.
   c. Déduire de la question précédente que $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} r$.
4. Montrer que $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} r$.
5. Soit $u \in \operatorname{Ker} r$. En remarquant que $p^2(u) = p(u)$, montrer que $u \in \operatorname{Ker} p$.
6. Conclure.

Exercice 14. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. On note : Id l'application identité de $\mathbb{R}^2$ et $0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)}$ l'application nulle de $\mathbb{R}^2$.
Le but de cet exercice est de trouver tous les couples d'endomorphismes (φ, ψ) tels que $\varphi, \psi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ vérifient les quatre propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \varphi^2 = -\operatorname{Id}, \\ \psi \neq \operatorname{Id}, \\ (\psi - \operatorname{Id})^2 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)}, \\ \ker(\varphi + \psi - \operatorname{Id}) \neq \{0_{\mathbb{R}^2}\}. \end{cases} \qquad (P)$$

1. *Étude d'un exemple.* On introduit les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ suivants :
$$\varphi : (x,y) \mapsto (-y,x), \qquad \psi : (x,y) \mapsto (x+y,y).$$
Montrer que le couple (φ, ψ) vérifie les quatre propriétés de (P).
2. *Cas général.* Nous revenons au cas général, et considérons dans toute la suite un couple (φ, ψ) qui vérifie (P).
   a. Justifier que $\dim\big(\ker(\varphi + \psi - \operatorname{Id})\big) \in \{1, 2\}$.
   b. Montrer que si $\dim\big(\ker(\varphi + \psi - \operatorname{Id})\big) = 2$, alors $\varphi = -(\psi - \operatorname{Id})$.
   c. En déduire que $\dim\big(\ker(\varphi + \psi - \operatorname{Id})\big) = 1$.
   d. On considère $u_2 \in \ker(\varphi + \psi - \operatorname{Id})$ tel que $u_2 \neq 0_{\mathbb{R}^2}$. Justifier que (u_2) est une base de $\ker(\varphi + \psi - \operatorname{Id})$.
3. On pose $u_1 = -\varphi(u_2)$, où u_2 est le vecteur introduit dans la question précédente.
   a. Montrer que (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
   b. Calculer $\varphi(u_1)$ en fonction de u_2.
   c. Calculer $\psi(u_2)$ puis $\psi(u_1)$ en fonction de u_1 et u_2.
   d. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, en déduire $\varphi(xu_1 + yu_2)$ et $\psi(xu_1 + yu_2)$ en fonction de x, y, u_1 et u_2.

1. – Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a
$$\varphi \circ \varphi(x,y) = \varphi\big(\varphi(x,y)\big) = \varphi(-y,x) = (-x,-y) = -(x,y),$$
par conséquent $\varphi \circ \varphi = -\operatorname{Id}$.
   – On a $\psi(0,1) = (1,1)$, donc $\psi \neq \operatorname{Id}_{\mathscr{L}(E)}$.
   – On a $(\psi - \operatorname{Id})^2 = \psi^2 - 2\psi + \operatorname{Id}$, car ψ et Id commutent. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\begin{aligned} \psi^2(x,y) - 2\psi(x,y) + (x,y) &= \psi(x+y,y) - 2(x+y,y) + (x,y) \\ &= (x+2y,y) - (2x+2y,2y) + (x,y) \\ &= (0,0). \end{aligned}$$
Ainsi, on a $(\psi - \operatorname{Id})^2 = \psi^2 - 2\psi + \operatorname{Id} = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
   – Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{aligned}[t] (\varphi + \psi - \operatorname{Id})(x,y) &= \varphi(x,y) + \psi(x,y) - (x,y) \\ &= (-y,x) + (x+y,y) - (x,y) \\ &= (0,x) \end{aligned}$
On a donc par exemple $(\varphi + \psi - \operatorname{Id})(0,1) = (0,0)$, ce qui justifie que $\ker(\varphi + \psi - \operatorname{Id}) \neq \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.
2. *a.* Comme $\ker(\varphi + \psi - \operatorname{Id})$ est un sev de $\mathbb{R}^2$, sa dimension est 0, 1 ou 2. Comme $\ker(\varphi + \psi - \operatorname{Id}) \neq \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, on a $\dim\big(\ker(\varphi + \psi - \operatorname{Id})\big) \neq 0$, ce qui donne bien le résultat.
   b. Supposons que $\dim\big(\ker(\varphi + \psi - \operatorname{Id})\big) = 2$. Comme $\ker(\varphi + \psi - \operatorname{Id})$ est un sev de $\mathbb{R}^2$ de dimension 2, ceci implique alors que $\ker(\varphi + \psi - \operatorname{Id}) = \mathbb{R}^2$. Autrement dit, $(\varphi + \psi - \operatorname{Id})(u) = 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire $\varphi + \psi - \operatorname{Id} = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Ceci se récrit $\varphi = -(\psi - \operatorname{Id})$.
   c. Si $\dim\big(\ker(\varphi + \psi - \operatorname{Id})\big) = 2$, alors $\psi - \operatorname{Id} = -\varphi$ d'après la question précédente, donc $(\psi - \operatorname{Id})^2 = \varphi^2 = -\operatorname{Id}$. Ceci est incompatible avec $(\psi - \operatorname{Id})^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$, il y a contradiction.
   Ainsi, comme $\dim\ker(\varphi + \psi - \operatorname{Id}) \notin \{0, 2\}$, $\dim\ker(\varphi + \psi - \operatorname{Id}) = 1$.
   d. On sait qu'il existe un vecteur $u_2 \in \ker(\varphi + \psi - \operatorname{Id})$ tel que $u_2 \neq 0_{\mathbb{R}^2}$, car $\ker(\varphi + \psi - \operatorname{Id}) \neq \{0_{\mathbb{R}^2}\}$. Comme $\dim\big(\ker(\varphi + \psi - \operatorname{Id})\big) = 1$, toute famille comprenant un unique vecteur non nul de $\ker(\varphi + \psi - \operatorname{Id})$ en est une base, ce qui conclut.
3. *a.* Montrons que la famille (u_1, u_2) est libre. On suppose que $\lambda\, u_1 + \mu\, u_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$, et on va montrer que $\lambda = \mu = 0$. Comme $u_1 = -\varphi(u_2)$, l'égalité se récrit $-\lambda\,\varphi(u_2) + \mu\, u_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$. On a alors aussi
$$0_{\mathbb{R}^2} \;=\; \varphi\big(-\lambda\,\varphi(u_2) + \mu\, u_2\big) \;=\; -\lambda\,\varphi^2(u_2) + \mu\,\varphi(u_2) \;=\; \lambda\, u_2 + \mu\,\varphi(u_2).$$

On a donc finalement $\begin{cases} -\lambda\,\varphi(u_2) + \mu\,u_2 = 0_{\mathbb{R}^2}, & E_1 \\ \lambda\,u_2 + \mu\,\varphi(u_2) = 0_{\mathbb{R}^2}. & E_2 \end{cases}$

On remarque que l'opération $\mu\,E_1 + \lambda\,E_2$ donne $\mu^2 u_2 + \lambda^2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$, soit $(\lambda^2+\mu^2)u_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$. Comme $u_2 \neq 0_{\mathbb{R}^2}$, on a alors $\lambda^2+\mu^2 = 0$, donc $\lambda = \mu = 0$.

Ainsi, la famille (u_1, u_2) est une famille libre de cardinal 2 dans $\mathbb{R}^2$, qui est de dimension 2, c'est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

b. On a $\varphi(u_1) = \varphi(-\varphi(u_2)) = -\varphi^2(u_2) = u_2$.

c.
- Comme $u_2 \in \ker(\varphi + \psi - \mathrm{Id})$, on a $\psi(u_2) + \varphi(u_2) - u_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$, donc

$$\psi(u_2) \;=\; u_2 - \varphi(u_2) \;=\; u_1 + u_2.$$

- D'après ce qui précède, on a $\psi^2(u_2) = \psi(u_1) + \psi(u_2)$, donc $\psi(u_1) = \psi^2(u_2) - \psi(u_2)$. Comme on a supposé que $\psi^2 = 2\psi - \mathrm{Id}$, on a

$$\psi(u_1) \;=\; 2\psi(u_2) - u_2 - \psi(u_2) \;=\; \psi(u_2) - u_2 \;=\; u_1 + u_2 - u_2 \;=\; u_1.$$

d. D'après ce qui précède, on a

- ⋆ $\varphi(xu_1 + yu_2) \;=\; x\,\varphi(u_1) + y\,\varphi(u_2) \;=\; -y\,u_1 + x\,u_2$.
- ⋆ $\psi(xu_1 + yu_2) \;=\; x\,\psi(u_1) + y\,\psi(u_2) \;=\; x\,u_1 + y\,(u_1 + u_2) \;=\; (x + y)\,u_1 + y\,u_2$.

On a finalement montré que, à changement de base près, le seul endomorphisme vérifiant (P) est l'endomorphisme de la question 1.