22. Représentation matricielle des applications linéaires

Exercice 1. Soient E un espace vectoriel de base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et φ l'endomorphisme de E défini par

$$\varphi(e_1) = -3e_1 + e_2 + e_3, \quad \varphi(e_2) = -2e_1 + e_2 + 4e_3 \quad \text{et} \quad \varphi(e_3) = 4e_1 - e_2 + 2e_3.$$

1. Déterminer la matrice A de φ dans la base $\mathscr{B}$.
2. Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$.

Exercice 2. Soient E un espace vectoriel, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E, et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Expliciter $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$.
2. Déterminer $\operatorname{Im} f$: on en donnera une base et sa dimension.
3. Justifier que f est un isomorphisme, et déterminer la matrice de $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1})$.

Exercice 3. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on considère les trois vecteurs : $\varepsilon_1 = (1, 1, 1)$, $\varepsilon_2 = (1, 1, -1)$, $\varepsilon_3 = (1, -1, 1)$.

1. Montrer que $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. On considère φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par les relations : $\varphi(e_1) = \varepsilon_1$, $\varphi(e_2) = \varepsilon_2$, $\varphi(e_3) = \varepsilon_3$.
   a. Expliciter la matrice M de φ dans la base canonique $\mathscr{B}$.
   b. Montrer que φ est bijective.
3. Déterminer la matrice de $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ dans la base $\mathscr{B}$. Montrer que cette matrice est combinaison linéaire de M et I et en déduire M^{-1}.
4. Donner une relation entre φ, φ^2 et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

Exercice 4. Déterminer $\operatorname{rg} f$, où $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ a pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ puis $\operatorname{Im} f$.
2. Montrer que f est un projecteur dont on précisera les éléments caractéristiques (c'est-à-dire qu'on précisera sur quel espace, et parallèlement auquel).

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel de dimension n. On considère $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$.

1. Factoriser $x^3 - 1$.
2. En déduire que $\mathrm{Id}_E - f$ est bijectif et expliciter $(\mathrm{Id}_E - f)^{-1}$ en fonction de f.

Exercice 7.
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $\mathscr{C} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\mathscr{D} = (v_1, v_2, v_3)$, avec

$$\begin{array}{lll} u_1 = (1, -2, 2), & u_2 = (0, 3, -2) & u_3 = (0, 4, -3), \\ v_1 = (0, 1, -1) & v_2 = (1, -1, 1) & v_3 = (1, 1, 0). \end{array}$$

Soit enfin f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(e_1) = u_1$, $f(e_2) = u_2$, $f(e_3) = u_3$.

1. Expliciter la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$. Montrer que f est bijective.
2. Montrer que $\mathscr{D}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $B = \operatorname{Mat}_{\mathscr{D}}(f)$.
3. Déterminer le noyau de f et son image.

Exercice 8. Soit $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on introduit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad f : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ M & \mapsto & AM - MD \end{array} \quad ,$$

ainsi que les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *a.* Montrer que $\mathscr{C} = (P, Q, R, S)$ est une base de E et déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{C}$.

   b. Déterminer le noyau et l'image de f, en précisant à chaque fois une base et la dimension.

2. *a.* Déterminer $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, où $\mathscr{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ est la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

   b. Répondre à nouveau à la question 1b à l'aide de la matrice B. On vérifiera qu'on obtient les mêmes résultats.

Exercice 9. On note $E = \mathbb{R}_2[x]$, et on note $\mathscr{B}$ la base (P_0, P_1, P_2) de E, où $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ et $P_2(x) = x^2$.

On considère l'application, notée f, qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[x]$ de E associe le polynôme $f(P) = Q_P$ défini par :

$$Q_P(x) \ = \ 2xP(x) - (x^2-1)P'(x).$$

1. *a.* Montrer que f est un endomorphisme de E.

   b. Écrire la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$.

2. *a.* Déterminer $\mathrm{Im}\, f$ et donner sa dimension.

   b. Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$.

3. *a.* À l'aide de la méthode du pivot de Gauss, déterminer les réels λ pour lesquels $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible.

   b. Déterminer, en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$, le noyau de $f - \lambda\,\mathrm{Id}$.

Exercice 10.

Soit $\mathbb{R}_2[x]$ l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{R}$, de degré inférieur ou égal à 2. Soit $\varphi : P \mapsto P + P'$, définie sur $\mathbb{R}_2[x]$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$. En déduire que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
3. Déterminer la matrice M de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$. Calculer M^{-1}.
4. En déduire l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[x]$ tel que $P(x) + P'(x) = x^2 + x + 1$.

Exercice 11. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On définit l'endomorphisme Φ de $\mathbb{R}^4$ par :

$$\Phi(e_i) = e_{i+1},\ \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant 3 \quad \text{et } \Phi(e_4) = e_1.$$

1. Montrer sans calcul que Φ est un automorphisme.
2. Déterminer la matrice A de Φ dans la base canonique.
3. Déterminer l'isomorphisme réciproque de Φ.

Exercice 12. Soient p et q deux projecteurs associés d'un espace vectoriel E et f l'endomorphisme de E défini par $f = 3p - q$.

1. Vérifier que le polynôme P défini par $P(x) = x^2 - 2x - 3$ est un polynôme annulateur de f.
2. En déduire que f est bijectif et déterminer f^{-1} en fonction de f et Id_E, puis en fonction de p et q.

Exercice 13. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe un entier naturel p non nul tel que $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$.

1. Montrer que A n'est pas inversible.
2. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^p = 1 - (1-x)(1 + x + \cdots + x^{p-1})$.
3. En remarquant que le polynôme P défini par $P(x) = x^p$ est un polynôme annulateur de A, montrer que $I - A$ est inversible et déterminer son inverse.
4. Montrer également que $I + A$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 14. On se place sur l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère les fonctions $f_1 : x \mapsto 1$, $f_2 : x \mapsto \mathrm{e}^x$, et $f_3 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$. On note $F = \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2, f_3)$ et

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & f' \end{array}$$

1. Vérifier que $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de F.
2. Montrer que φ est un endomorphisme de F.
3. Donner la matrice A de φ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 15. Soit φ un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $\varphi^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On se propose de montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de φ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *a.* Montrer que $\mathrm{Im}\,\varphi \subset \mathrm{Ker}\,\varphi$.

   b. En déduire que $\dim(\mathrm{Im}\,\varphi) = 1$ et $\dim(\mathrm{Ker}\,\varphi) = 2$.

2. *a.* Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $\varphi(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. On note $v = \varphi(u)$.

   b. Montrer qu'il existe un vecteur w tel que (v, w) soit une base de $\operatorname{Ker} \varphi$. Montrer que la famille (v, w, u) est une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de φ dans cette base ?

Exercice 16. On se place sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$, où $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $\mathscr{B}$ sa base canonique, donnée par $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$, où $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x, \ldots, P_n(x) = x^n$.

1. *Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.*

   On désigne par a un nombre entier fixé, et on définit, pour tout polynôme appartenant $P \in \mathbb{R}_n[x]$, le polynôme Q_P donné par $Q_P(x) = P(x + a)$.

   a. On introduit l'application $\Phi_a : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}[x] \\ P & \mapsto & Q_P \end{array}$.
   Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on a $Q_P \in \mathbb{R}_n[x]$, et justifier que Φ_a définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

   b. Déterminer la matrice M_a de l'endomorphisme Φ_a dans la base $\mathscr{B}$, et montrer que M_a est inversible. Qu'en déduire pour Φ_a ?

   c. Pour $a \neq 0$, déterminer les valeurs $\lambda \in \mathbb{R}$ telles que l'équation
   $$\Phi_a(P) = \lambda P,$$
   d'inconnue $P \in \mathbb{R}_n[x]$ ait des solutions non nulles. Pour ces valeurs de λ, déterminer toutes les solutions de l'équation.

2. *Composition des endomorphismes Φ_a, $a \in \mathbb{Z}$.*

   a. Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, expliciter les endomorphismes $\Phi_a \circ \Phi_b$ et $\Phi_b \circ \Phi_a$, et en déduire $(\Phi_a)^{-1}$.

   b. Expliciter le carré et l'inverse de la matrice M_1.

   Cas particulier. Écrire la matrice M_1 et son inverse dans le cas $n = 4$.

Exercice 17. Si $x_1, \ldots, x_n$ sont des réels, on appelle matrice de Vandermonde associée à ces réels la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Partie 1 : matrices de Vandermonde et inversibilité.

1. Montrer que s'il existe i, j tels que $i \neq j$ et $x_i = x_j$, alors V n'est pas inversible.
2. On souhaite montrer la réciproque du résultat précédent.

   a. On considère l'application
   $$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n-1}[x] & \to & \mathbb{R}^n \\ P & \mapsto & (P(x_1), \ldots, P(x_n)) \end{array}$$
   Écrire la matrice de φ dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ et $\mathbb{R}^n$.

   b. En déduire que si les réels $x_1, \ldots, x_n$ sont distincts, alors V est inversible.

Partie 2 : familles de vecteurs propres associées à des valeurs propres distinctes.

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n, et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $u_1, \ldots, u_k$ sont des vecteurs non nuls de E et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont des réels tels que

$$f(u_1) = \lambda_1 u_1, \quad f(u_2) = \lambda_2 u_2, \ \ldots, \ f(u_k) = \lambda_k u_k.$$

On dit que $u_1, \ldots, u_k$ sont des vecteurs propres de f, associés aux valeurs propres respectives $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

3. En utilisant une matrice de Vandermonde, montrer que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont distincts, alors la famille $(u_1, \ldots, u_k)$ est libre.
4. On suppose maintenant que $k = n$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont distincts.

   a. Justifier que $\mathscr{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E.

   b. Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.