23. Couples de variables aléatoires discrètes

Exercice 1. La loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par :

$X\backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

1. Vérifier qu'on a bien défini une loi de couple, et déterminer les lois de X et Y.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(XY)$.

Exercice 2. Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes et de même loi, avec $\mathbb{P}(X_i = 0) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(X_i = 2) = \frac{1}{2}$. Soient $S = X_1 + X_2$ et $P = X_1X_2$.

1. Vérifier que la loi donnée est bien une loi de probabilité.
2. Déterminer la loi du couple (S, P).
3. Déterminer la loi de S et la loi de P. Les variables aléatoires S et P sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{E}(S)$, $\mathbb{E}(P)$, $\mathbb{V}(S)$, $\mathbb{V}(P)$.

Exercice 3. On considère n boîtes numérotées de 1 à n. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la boîte portant le numéro i contient i boules, numérotées de 1 à i. On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte. On note X et Y les variables aléatoires correspondant respectivement au numéro de la boîte, et à celui de la boule.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, déterminer $\mathbb{P}_{[X=i]}(Y = j)$.
3. Écrire la loi de Y sous la forme d'une somme, et calculer son espérance.

Exercice 4. On lance un dé indéfiniment, et on note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier 6. On note Y le nombre de lancers nécessaires, après l'obtention du premier 6, pour obtenir le deuxième.

1. Déterminer les lois de X, de Y, ainsi que leur espérance.
2. Soit $Z = X + Y$. Déterminer l'espérance de Z.
3. Déterminer la loi de Z.

Exercice 5. On pourra utiliser la généralisation suivante concernant les séries géométriques dérivées : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $x \in]-1, 1[$, alors

$$\sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)\,x^{k-n} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Deux joueurs A et B procèdent chacun à une succession de lancers indépendants d'une même pièce. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir *Pile* est $p \in]0, 1[$.

Le joueur A commence et il s'arrête quand il obtient le premier *Pile*. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers effectués par le joueur A.

Le joueur B effectue alors autant de lancers que le joueur A et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de *Pile* obtenus par le joueur B.

1. Rappeler la loi de X. Pour tous $k \in \mathbb{N}^\star$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}_{[X=k]}(Y = n)$.
2.
   a. Quelles sont les valeurs que Y peut prendre ?

   b. Montrer que $\mathbb{P}(Y = 0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} p\,(1-p)^{2k-1} = \frac{1-p}{2-p}$.

   c. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que $\mathbb{P}(Y = n) = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1}(1-p)^{2k-n-1}$.

   d. En utilisant la formule rappelée au début de l'exercice, établir l'égalité suivante :
   $$\mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{(2-p)^2}\left(\frac{1-p}{2-p}\right)^{n-1}.$$

Exercice 6. On se propose de montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires suivant la même loi et si Z est une variable aléatoire, alors XZ et YZ ne suivent pas forcément la même loi.

On lance une pièce équilibrée. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on obtient *pile* et 0 sinon et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient *face* et 0 sinon.

1.
   a. Déterminer la loi de XY.

   b. Déterminer la loi de Y^2.

2. Conclure.

Exercice 7. On considère un lot de 10 dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Sur ces 10 dés, cinq sont équilibrés, les cinq autres sont pipés. On suppose que pour un dé pipé, la probabilité d'obtenir la face 1 est de $\frac{5}{6}$.

1. On choisit un dé au hasard, on le lance 3 fois et on obtient 3 fois la face 1. Quelle est la probabilité que le dé choisi soit pipé ?
2. On effectue des lancers successifs avec un dé équilibré. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués avec ce dé pour obtenir 1 pour la première fois.

   On effectue cette fois des lancers successifs avec un dé pipé, et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués pour obtenir 1 pour la première fois.

   a. Déterminer la loi de X et donner son espérance et sa variance.

   b. Déterminer la loi de Y et calculer son espérance et sa variance.
3. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.
4. Calculer $\mathbb{P}(X < Y)$.
5. *a.* Écrire une fonction Python `simule()` qui simule l'expérience.

   b. Écrire un script Python qui calcule une estimation des probabilités calculées en questions 4. et 5.

Exercice 8. Deux amies partent en vacances de façon indépendante. Leurs séjours respectifs ont lieu dans une période de n jours, avec $n > 3$, que l'on numérote de 1 à n.

Pour éventuellement s'y rencontrer, elles ont projeté de séjourner trois jours exactement consécutifs dans un hôtel spécifique qu'elles ont choisi.

On note X_1 et X_2 les jours d'arrivée respectifs des deux amies, et on suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes, et suivent toutes deux une loi uniforme sur $[\![1, n-2]\!]$. Les arrivées ont lieu le matin et les départs le soir deux jours plus tard.

1. *a.* Quelle est la probabilité que les deux amies arrivent le même jour ?

   b. Quelle est la probabilité qu'elles arrivent avec un jour d'écart ?

   c. Quelle est la probabilité qu'elles puissent se rencontrer dans l'hôtel ?
2. Sachant qu'elles se sont rencontrées, quelle est la probabilité qu'elles ne puissent passer qu'une journée ensemble ?

Exercice 9. Une urne contient $n-2$ boules vertes, 1 boule blanche et 1 boule rouge. On tire les boules de l'urne, une à une et sans remise.

1. Soient X_1 le rang d'apparition de la boule blanche et X_2 le rang d'apparition de la boule rouge. Déterminer la loi de X_1, la loi de X_2, et la loi du couple (X_1, X_2). Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
2. Soit X le rang où on obtient pour la première fois soit la boule blanche, soit la boule rouge. Soit Y le rang où on a obtenu pour la première fois les deux boules blanche et rouge. Déterminer la loi de X et la loi de Y. Calculer les espérances de X et de Y.

Exercice 10. Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O. Au départ, le mobile est à l'origine. Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est à l'abscisse k à l'instant n, il sera

- sur le point d'abscisse $k+1$ à l'instant $n+1$ avec probabilité $\frac{k+1}{k+2}$,
- sur le point d'abscisse 0 à l'instant $n+1$ avec la probabilité $\frac{1}{k+2}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse du point où se situe le mobile à l'instant n. On a donc $X_0 = 0$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et on pose $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$.

1. Donner la loi de X_1.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
3. *a.* Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^\star$ et $k \in [\![1, n]\!]$,

   $$\mathbb{P}(X_n = k) \;=\; \frac{k}{k+1}\,\mathbb{P}(X_{n-1} = k-1).$$

   b. En remarquant que la relation obtenue à la question précédente peut s'écrire sous la forme $(k+1)\,\mathbb{P}(X_n = k) = k\,\mathbb{P}(X_{n-1} = k-1)$, montrer que $\mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_{n-1}) = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

   c. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, $\mathbb{E}(X_n)$ sous la forme d'une somme mettant en jeu certains termes de la suite (u_n).