24. Intégration sur un intervalle quelconque

Exercice 1. Etudier la convergence et, si elles convergent, calculer la valeur des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
2. $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{t(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t$.
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$.
4. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t$.
5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$.
6. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{t-1}{\sqrt{t(2-t)}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2. Déterminer la nature des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$.
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3+5t^2+1}{2t^5+2t^3+1}\,\mathrm{d}t$.
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^3}\,\mathrm{d}t$.
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t^3)}{\sqrt{t^3+1}}\,\mathrm{d}t$.
7. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{t\sqrt{1-t}}}$.
8. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.
9. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3 – *Fonction gamma*. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si x est strictement positif.

Exercice 4. Montrer que les intégrales suivantes convergent et déterminer leur valeur.

1. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u$, *on posera* $u=\sin t$.
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{t-\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$, *on posera* $u=\mathrm{e}^t$.

Exercice 5. On note I l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\displaystyle\frac{t^3\ln t}{(1+t^2)^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{1} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ converge et est égale à $\displaystyle-\int_1^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u$.
   On pourra s'aider du changement de variable $u=\frac{1}{t}$.
3. En déduire la convergence et la valeur de I.

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

1. Etudier la parité de f.
2. *a.* Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ et préciser sa valeur.
   b. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. *a.* En intégrant par parties, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x=\ln 2$.
   b. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 7. Pour tout $n\in[\![2,+\infty[\![$, on pose $v_n=\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que v_n n'est pas défini pour $n=0$ et $n=1$.
2. Démontrer que v_n existe pour tout $n\geqslant 2$.
3. Démontrer l'inégalité $0\leqslant v_n\leqslant \frac{1}{n-1}$ pour tout $n\geqslant 2$.
4. En déduire la limite de la suite (v_n).

Exercice 8.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,u^n\,\mathrm{d}u$ converge pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Dans la suite, on pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,u^n\,\mathrm{d}u$.

2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, $I_n=nI_{n-1}$.
3. En déduire la valeur de I_n en fonction de n.

Exercice 9.

1. Justifier la convergence de $I_n=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^n\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}_+$, on pose $J_n(a) = \int_0^a x^n \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$. Déterminer une relation de récurrence entre $J_n(a)$ et $J_{n+2}(a)$.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation de récurrence liant I_n et I_{n+2} .
4. Calculer I_n pour n impair.
5. En admettant le résultat $I_0 = \sqrt{2\pi}$, calculer I_n pour n pair.

Exercice 10 – *Fonction définie par une intégrale impropre.*

1. Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

   On définit alors la fonction f sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$.
2. *a.* Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $g(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$ a une limite finie à droite en 0.
   b. Vérifier que pour tout $x > 0$, $g(x) = -\ln x - f(x) + f(1)$. En déduire un équivalent de f en 0.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et déterminer sa dérivée.

Exercice 11. Le but de cet exercice est de montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente mais pas absolument convergente.
On introduit la fonction $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ définie sur $\mathbb{R}_+^\star$.

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
3. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.
4. Montrer que $|\sin t| \geqslant (\sin(t))^2 = \frac{1}{2}(1-\cos(2t))$ pour tout $t \geqslant 0$.
5. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ n'est pas absolument convergente.

Exercice 12. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f : t \mapsto t\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. $\displaystyle\int_{1/n}^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{k(k+1)^2}$.
2. Déterminer des réels a, b, c tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$,
$$\frac{2k+1}{k(k+1)^2} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{(k+1)^2}.$$
3. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{1/n}^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. On admettra que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 13 – *Intégrales de Wallis et intégrale de Gauss.*

1. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\mathrm{d}x$.
   a. Calculer a_0 et a_1.
   b. Montrer que $0 < a_{n+1} < a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   c. Pour $n \in \mathbb{N}$, établir une relation de récurrence entre a_n et a_{n+2}.
   d. Montrer que $n\,a_n a_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
   e. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$.
   f. À l'aide des résultats précédents, montrer que $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$.
3. Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a $\ln(1+x) \leqslant x$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $b_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x$, $c_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x$.
   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, l'intégrale dans la définition de c_n converge.
   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $b_n \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant c_n$.
   c. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. En effectuant le changement de variable $x = \sqrt{n}\sin t$ dans l'intégrale b_n, montrer que $b_n = \sqrt{n}\,a_{2n+1}$.
   d. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. En effectuant le changement de variable $x = \sqrt{n}\tan t$ dans l'intégrale c_n, montrer que $c_n = \sqrt{n}\,a_{2n-2}$.
5. Déduire de ce qui précède la valeur de I.
6. Calculer $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.