

25. Convergence et approximations

Exercice 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{n}$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X \geq n^2) \leq \frac{1}{n}$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(|X - n| \geq n) \leq 1 - \frac{1}{n}$.
3. En déduire que $\mathbb{P}(X \geq 2n) \leq 1 - \frac{1}{n}$.

Exercice 2.

Pour étudier les particules émises par une substance radioactive, on dispose d'un détecteur. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de particules qui atteignent le détecteur pendant un intervalle de temps t . Le nombre maximal de particules que le détecteur peut compter pendant un intervalle de temps t est de 10^3 .

On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 100$. Donner une majoration de la probabilité que X dépasse 10^3 .

Exercice 3. Soient $a \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

1. Calculer, pour tout réel t , l'espérance de la variable aléatoire e^{tX} .
2. Montrer que pour tout réel $t > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq e^{-ta} (1 - p + p e^t)^n.$$

Exercice 4. On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. Déterminer un nombre de tirages tel qu'on peut garantir avec une probabilité supérieure à 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ?

Exercice 5. À la sortie d'une chaîne de production, on trouve en moyenne un produit sur 500 défectueux. En faisant une approximation qu'on justifiera, estimer la probabilité de ne pas trouver plus de 5 produits défectueux dans un échantillon de 2000 produits ?

Exercice 6. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et telles que X_n suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n > p n \sqrt{n}).$$

Exercice 7. On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant toutes la loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{et} \quad \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k.$$

1. Donner la loi de S_n , en déduire l'espérance et la variance de $\bar{X}_n$.
2.
 - a. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) = 0$.
 - b. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une constante K_ε telle que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{K_\varepsilon}{n}.$$

- c. En déduire que pour tout $r \in]0, \frac{1}{2}[$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{n^r}\right) = 0.$$