# 3. Étude de fonction, fonctions usuelles

**Exercice 1**. Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Comment obtenir la courbe de $x \mapsto -f(x)$ à partir de celle de $f$ ?
2. Comment obtenir la courbe de $x \mapsto f(x+1)$ à partir de celle de $f$ ?
3. Comment obtenir la courbe de $x \mapsto f(x)+2$ à partir de celle de $f$ ?
4. Comment savoir si la courbe de $f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x=0$ ?
5. Comment savoir si la courbe de $f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x=a$, avec $a$ réel ?

**Exercice 2**. Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}}$
2. $g : x \mapsto \sqrt{(x^2-11)(x+2)}$
3. $h : x \mapsto \dfrac{1}{\ln(\mathrm{e}^x-1)}$.

**Exercice 3**. Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si $f$ et $g$ sont paires (resp. impaires) alors $f+g$ est paire (resp. impaire).
2. Si $f$ et $g$ sont de même parité, que peut-on dire du produit $fg$ ?
3. Si $f$ et $g$ sont de parités opposées, que peut-on dire du produit $fg$ ?

**Exercice 4**. Dans chacun des cas suivants, étudier la parité de la fonction $f$, en commençant par déterminer son ensemble de définition.

1. $f : x \mapsto \dfrac{x^3+x}{x^2+1}$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$.
3. $f : x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.
4. $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

**Exercice 5**. 1. Montrer que les fonctions suivantes sont périodiques et en déterminer une période.

   *a.* $x \mapsto \sin(\pi x)$.

   *b.* $x \mapsto \sin(2x)+\cos(2x)$.

   *c.* $x \mapsto \sin(3x-1)\cos(2x)$.

2. Soit $T>0$. Donner une fonction $T$-périodique.

**Exercice 6**. Soient $f$ et $g$ deux fonctions réelles définies sur un intervalle $I$.

1. Démontrer les assertions suivantes.
   *a.* Si $f$ et $g$ sont croissantes, alors $f+g$ est croissante.
   *b.* Si $f$ et $g$ sont décroissantes, alors $f+g$ est décroissante.
2. Montrer que si $f$ est croissante et $g$ est strictement croissante, alors $f+g$ est strictement croissante.
3. Vrai ou faux ? Si $f$ et $g$ sont croissantes, alors $fg$ est croissante.

**Exercice 7**. Dans chacun des cas suivants, déterminer le sens de variation de la fonction $f$ sans la dériver.

1. $f(x) = \mathrm{e}^{-x} - 2x - 1,\ $ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) = -3\ln x + \dfrac{3}{x^2+1},\ $ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$.
3. $f(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \ln x,\ $ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$.

**Exercice 8**. Dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses. Si une propriété est vraie, la démontrer, si elle est fausse, proposer un contre-exemple.

1. Une fonction croissante et périodique est constante.
2. Une fonction périodique est bornée.

**Exercice 9**. Pour les fonctions $g$ et $f$ suivantes, déterminer $g \circ f$ et étudier sa monotonie.

1. $f : x \mapsto -3x+5,\ $ et $\ g : x \mapsto \mathrm{e}^x$.
2. $f : x \mapsto x^2+x-9,\ $ et $\ g : x \mapsto \ln x$.

**Exercice 10**. Soit $f : x \mapsto \sqrt{1-\cos x}$. Justifier que l'on peut restreindre l'étude de $f$ à $[0,\pi]$.

**Exercice 11**. Montrer que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

**Exercice 12**. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

**Exercice 13**. Montrer que pour tout $x \in ]0,1[$, $x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \dfrac{1}{2}$.

**Exercice 14**. Résoudre les équations suivantes.

1. $5^{2x} - 5^{x+1} + 2 = 0$
2. $2^{x^2} = 4^{-x}$
3. $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$.

**Exercice 15**. 1. Résoudre $\cos^2(3x) = 1$.

2. Résoudre l'équation $3\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) = \sqrt{6}$.

**Exercice 16**. On souhaite dans cet exercice résoudre l'équation :

$$8x^4 - 8x^2 + \frac{1}{2} = 0 \quad (E).$$

1. Résoudre l'équation $\cos(4\theta) = \dfrac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}$, puis dans $[-\pi, \pi[$.
   Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.
2. Montrer que : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(4\theta) = 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1$.
   *Pour cela, on pourra utiliser la formule donnant* $\cos(2a)$ *en fonction de* $\cos(a)$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation $(E)$ qui sont dans $[-1, 1]$.
   *On écrira les solutions sous la forme* $x = \cos(\theta)$, *avec* $\theta \in [0, \pi]$.
4. Résoudre l'équation $(E)$ d'une deuxième manière, et en déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

**Exercice 17**. On considère le nombre réel

$$r = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}.$$

1. Développer l'expression $(a+b)^3$ pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $r$ vérifie l'égalité $r^3 = 40 + 6r$.
3. Factoriser le polynôme $x^3 - 6x - 40$.
4. En déduire une expression simple du nombre $r$.

**Exercice 18**.

1. Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2[, \tan x \geqslant x$.
2. Quelle inégalité peut-on en déduire pour tout $x \in ]-\pi/2, 0[$ ?
3. Déterminer la valeur de $\tan(\pi/6)$ et $\tan(\pi/3)$.
4. Soient $a, b \in ]-\pi/2, \pi/2[$.
   *a.* Montrer que $\tan(a)\tan(b) = 1$ si et seulement si $a + b = -\frac{\pi}{2}$ ou $a + b = \frac{\pi}{2}$.
   *b.* Montrer que si $a + b \notin \left\{-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right\}$, alors
   $$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$
   *c.* En déduire la valeur de $\tan(\pi/12)$.

**Exercice 19**. On définit la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$$

1. *a.* Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout réel $x$.
   *b.* Déterminer la parité de $f$.
   *c.* Donner le tableau de variations de $f$ sur $\mathbb{R}$.
   *d.* Résoudre les équations $f(x) = 1$ et $f(x) = 2$. *On pourra si besoin poser* $y = e^x$.
2. *a.* Montrer que pour tout réel $x$, $f(2x) = 2\big(f(x)\big)^2 - 1$.
   *b.* En déduire les solutions réelles de $f(2x) + 5 = 6f(x)$.
3. *a.* Montrer que $f$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$.
   *b.* On introduit la fonction $h : y \mapsto \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$. Montrer que la fonction $h$ est bien définie sur $[1, +\infty[$.
   *c.* Pour tout $y \in [1, +\infty[$, calculer $f(h(y))$. Que peut-on en déduire ?

**Exercice 20**. Soit $x \in \mathbb{R}$

1. Montrer que $\lfloor 2x \rfloor \geqslant 2\lfloor x \rfloor$.
2. A-t-on $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$ ?
3. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que $\lfloor kx \rfloor = k\lfloor x \rfloor$ si et seulement si $x - \lfloor x \rfloor < \dfrac{1}{k}$.

**Exercice 21**. Montrer que pour $x, y \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

**Exercice 22**. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. En utilisant la croissance de la fonction partie entière, montrer que
$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor.$$
2. Montrer l'autre inégalité
$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor.$$
3. Que peut-on en déduire ?

**Exercice 23**. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1. $2\left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor = x$
2. $\lfloor x^2 - 2x \rfloor = 1$