

3. Étude de fonction, fonctions usuelles

Exercice 1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Comment obtenir la courbe de $x \mapsto -f(x)$ à partir de celle de f ?
2. Comment obtenir la courbe de $x \mapsto f(x+1)$ à partir de celle de f ?
3. Comment obtenir la courbe de $x \mapsto f(x) + 2$ à partir de celle de f ?
4. Comment savoir si la courbe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 0$?
5. Comment savoir si la courbe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = a$, avec a réel ?

Exercice 2. Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-2}\sqrt{x+1}}$
2. $g : x \mapsto \sqrt{(x^2-11)(x+2)}$
3. $h : x \mapsto \frac{1}{\ln(e^x-1)}$.

Exercice 3. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si f et g sont paires (resp. impaires) alors $f+g$ est paire (resp. impaire).
2. Si f et g sont de même parité, que peut-on dire du produit fg ?
3. Si f et g sont de parités opposées, que peut-on dire du produit fg ?

Exercice 4. Dans chacun des cas suivants, étudier la parité de la fonction f , en commençant par déterminer son ensemble de définition.

1. $f : x \mapsto \frac{x^3+x}{x^2+1}$.
2. $f : x \mapsto \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.
3. $f : x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2+1})$.
4. $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 5. 1. Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f est périodique et en déterminer une période.

- a. $x \mapsto \sin(\pi x)$.
- b. $x \mapsto \sin(2x) + \cos(2x)$.
- c. $x \mapsto \sin(3x-1)\cos(2x)$.

2. Soit $T > 0$. Déterminer un réel α tel que la fonction $f : x \mapsto \sin(\alpha x)$ soit T -périodique.

Exercice 6. Soient f et g deux fonctions réelles définies sur un intervalle I .

1. Démontrer les assertions suivantes.
 - a. Si f et g sont croissantes, alors $f+g$ est croissante.
 - b. Si f et g sont décroissantes, alors $f+g$ est décroissante.
2. Montrer que si f est croissante et g est strictement croissante, alors $f+g$ est strictement croissante.
3. Vrai ou faux ? Si f et g sont croissantes, alors fg est croissante.

Exercice 7. Dans chacun des cas suivants, déterminer le sens de variation de la fonction f sans la dériver.

1. $f(x) = e^{-x} - 2x - 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) = -3\ln x + \frac{3}{x^2+1}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
3. $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} + \ln x$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 8. Dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses. Si une propriété est vraie, la démontrer, si elle est fausse, proposer un contre-exemple.

1. Une fonction croissante et périodique sur $\mathbb{R}$ est constante.
2. Une fonction périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée.

Exercice 9. Pour les fonctions g et f suivantes, déterminer $g \circ f$ et étudier sa monotonie.

1. $f : x \mapsto -3x + 5$, et $g : x \mapsto e^x$.
2. $f : x \mapsto x^2 + x - 9$, et $g : x \mapsto \ln x$.

Exercice 10. Soit $f : x \mapsto \sqrt{1 - \cos x}$. Justifier que l'on peut restreindre l'étude de f à $[0, \pi]$.

Exercice 11. Montrer que pour tout $x > -1$, $\ln(1 + x) \leq x$.

Exercice 12. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

Exercice 13. Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, $x^x(1 - x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 14. Résoudre les équations suivantes.

1. $5^{2x} - 5^{x+1} + 2 = 0$
2. $2^{x^2} = 4^{-x}$
3. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

Exercice 15. 1. Résoudre $\cos^2(3x) = 1$.

2. Résoudre l'équation $3 \cos(2x) - \sqrt{3} \sin(2x) = \sqrt{6}$.

Exercice 16. On souhaite dans cet exercice résoudre l'équation :

$$8x^4 - 8x^2 + \frac{1}{2} = 0 \quad (E).$$

1. Résoudre l'équation $\cos(4\theta) = \frac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}$, puis dans $[-\pi, \pi[$.
Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.
2. Montrer que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(4\theta) = 8 \cos^4(\theta) - 8 \cos^2(\theta) + 1$.
Pour cela, on pourra utiliser la formule donnant $\cos(2a)$ en fonction de $\cos(a)$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation (E) qui sont dans $[-1, 1]$.
On écrira les solutions sous la forme $x = \cos(\theta)$, avec $\theta \in [0, \pi]$.
4. Résoudre l'équation (E) d'une deuxième manière, et en déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 17. On considère le nombre réel

$$r = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}.$$

1. Développer l'expression $(a + b)^3$ pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
2. Montrer que r vérifie l'égalité $r^3 = 40 + 6r$.
3. Factoriser le polynôme $x^3 - 6x - 40$.
4. En déduire une expression simple du nombre r .

Exercice 18.

1. Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2[$, $\tan x \geq x$.
2. Quelle inégalité peut-on en déduire pour tout $x \in]-\pi/2, 0[$?

3. Déterminer la valeur de $\tan(\pi/6)$ et $\tan(\pi/3)$.
4. Soient $a, b \in]-\pi/2, \pi/2[$.
 - a. Montrer que $\tan(a)\tan(b) = 1$ si et seulement si $a + b = -\frac{\pi}{2}$ ou $a + b = \frac{\pi}{2}$.
 - b. Montrer que si $a + b \notin \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$, alors

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$

- c. En déduire la valeur de $\tan(\pi/12)$.

Exercice 19. On définit la fonction

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

1.
 - a. Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout réel x .
 - b. Déterminer la parité de f .
 - c. Donner le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
 - d. Résoudre les équations $f(x) = 1$ et $f(x) = 2$. On pourra si besoin poser $y = e^x$.
2.
 - a. Montrer que pour tout réel x , $f(2x) = 2(f(x))^2 - 1$.
 - b. En déduire les solutions réelles de $f(2x) + 5 = 6f(x)$.
3.
 - a. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$.
 - b. On introduit la fonction $h : y \mapsto \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$. Montrer que la fonction h est bien définie sur $[1, +\infty[$.
 - c. Pour tout $y \in [1, +\infty[$, calculer $f(h(y))$. Que peut-on en déduire ?

1.
 - a. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$, donc $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$.
 - b. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = f(x)$. On en déduit donc que f est une fonction paire sur $\mathbb{R}$.
 - c. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de telles fonctions. D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Comme f est paire, il suffit d'étudier ses variations sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $e^{-x} \leq 1 \leq e^x$, donc $e^x - e^{-x} \geq 0$, et $f'(x) \geq 0$. Ainsi, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, ce qui implique qu'elle est décroissante sur $\mathbb{R}_-$, par parité.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, et par parité $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

On obtient le tableau suivant.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

- d. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\Leftrightarrow e^x + e^{-x} = 2 \stackrel{\text{car } e^x \neq 0}{\Leftrightarrow} e^{2x} + 1 = 2e^x \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (e^x - 1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Donc l'unique solution de l'équation $f(x) = 1$ est 0.

N.B. On pouvait aussi remarquer que $f(0) = 1$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) > f(0) = 1$. De même, pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $f(x) > f(0) = 1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) = 2 &\Leftrightarrow e^x + e^{-x} = 4 \Leftrightarrow e^{2x} + 1 = 4e^x \Leftrightarrow (e^x)^2 - 4e^x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 4y + 1 = 0 \\ y = e^x \end{cases} \end{aligned}$$

Le polynôme $y^2 - 4y + 1$ a pour racines $2 - \sqrt{3}$ et $2 + \sqrt{3}$ qui sont toutes deux dans $\mathbb{R}_+^*$. On déduit alors de ce qui précède que les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont $\ln(2 - \sqrt{3})$ et $\ln(2 + \sqrt{3})$.

N.B. On aurait aussi pu exploiter la parité de f et ne chercher les solutions que dans $\mathbb{R}_+$: la seule solution positive est $\ln(2 + \sqrt{3})$. La parité indique que $-\ln(2 + \sqrt{3})$ est l'unique solution dans $\mathbb{R}_-$. On remarque que $-\ln(2 + \sqrt{3}) = \ln \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \ln \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \ln(2 - \sqrt{3})$.

2. a. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$2(f(x))^2 - 1 = 2 \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - 1 = 2 \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - 1 = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = f(2x).$$

- b. D'après la question précédente, l'équation $f(2x) + 5 = 6f(x)$ se réécrit $2(f(x))^2 + 4 = 6f(x)$. En posant $y = f(x)$, l'équation devient $y^2 - 3y + 2 = 0$, dont les solutions sont 1 et 2.

Finalement, on en déduit que x est solution l'équation de départ si et seulement si $f(x) = 1$ ou $f(x) = 2$. La question précédente assure alors que les solutions sont $-\ln(2 + \sqrt{3})$, 0 et $\ln(2 + \sqrt{3})$.

3. a. On sait que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Comme f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, le théorème de la bijection assure qu'elle est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur son ensemble image $f(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[$, d'après le tableau de variations.

- b. Si $y \in [1, +\infty[$, alors $y^2 - 1 \leq 0$, donc $\sqrt{y^2 - 1}$ est bien défini, et $y + \sqrt{y^2 - 1} \geq 1$ donc $\ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$ est bien défini également.

- c. Soit $y \in [1, +\infty[$. On a $e^{h(y)} = e^{\ln(y + \sqrt{y^2 - 1})} = y + \sqrt{y^2 - 1}$, et

$$\begin{aligned} -h(y) &= -\ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) = \ln \frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}} = \ln \frac{y - \sqrt{y^2 - 1}}{(y + \sqrt{y^2 - 1})(y - \sqrt{y^2 - 1})} \\ &= \ln \frac{y - \sqrt{y^2 - 1}}{y^2 - (y^2 - 1)} \\ &= \ln(y - \sqrt{y^2 - 1}). \end{aligned}$$

Ainsi, $e^{-h(y)} = e^{\ln(y - \sqrt{y^2 - 1})} = y - \sqrt{y^2 - 1}$. Finalement,

$$f(h(y)) = \frac{e^{h(y)} + e^{-h(y)}}{2} = \frac{y + \sqrt{y^2 - 1} + (y - \sqrt{y^2 - 1})}{2} = \frac{2y}{2} = y.$$

Comme pour tout $y \in [1, +\infty[$, on a $f(h(y)) = y$, on en déduit que h est la réciproque de f .

Exercice 20. Soit $x \in \mathbb{R}$

- Montrer que $\lfloor 2x \rfloor \geq 2\lfloor x \rfloor$.
- A-t-on $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$?
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\lfloor kx \rfloor = k\lfloor x \rfloor$ si et seulement si $x - \lfloor x \rfloor < \frac{1}{k}$.

Exercice 21. Montrer que pour $x, y \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Exercice 22. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- En utilisant la croissance de la fonction partie entière, montrer que

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \leq \lfloor x \rfloor.$$

- Montrer l'autre inégalité

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \geq \lfloor x \rfloor.$$

- Que peut-on en déduire ?

Exercice 23. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1. $2 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = x$

2. $\lfloor x^2 - 2x \rfloor = 1$