4. Sommes et produits

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans chacun des cas, calculer la somme S .

$$1. S = \sum_{k=11}^{50} k. \quad 2. S = \sum_{k=4}^{22} (k+1)(k-3). \quad 3. S = \sum_{k=1}^n (2k-1)^2.$$

$$4. S = \sum_{k=0}^n (-1)^k 3^{n-k}. \quad 5. S = \sum_{k=0}^{2n} |n-k|.$$

Exercice 2.

1. Récrire les expressions suivantes en utilisant la notation factorielle.

a. $6 \times 5 \times 4 \times 3$
 b. $n(n-1)(2n+2)$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
 c. $\frac{10 \times 9 \times 8}{7 \times 6 \times 5 \times 4}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Simplifier les nombres suivants :

$$\frac{3 \times 4!}{(3!)^2}, \quad \frac{n!}{(n-1)!}, \quad \frac{(n+1)!}{(n-3)!}, \quad \frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!}.$$

Exercice 3.

1. Exprimer le produit des entiers pairs compris entre 1 et $2n$ à l'aide de $n!$.

2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^n (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$.

Exercice 4. Calculer les sommes suivantes. Dans chacun des cas, on pourra :

- soit conjecturer une expression de la somme puis la démontrer par récurrence,
- soit se ramener à une somme télescopique.

a. $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!}$, $n \in \mathbb{N}$.
 b. $T_n = \sum_{k=0}^n k \cdot k!$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les produits suivants :

$$A_n = \prod_{k=1}^n \frac{k-2}{k+2}, \quad B_n = \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+2}, \quad C_n = \prod_{k=1}^n (4k-2), \quad D_n = \prod_{k=0}^n e^{-k},$$

$$E_n = \prod_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2, \quad F_n = \prod_{k=2}^n \frac{k^2+k-2}{k^2+2k-3}, \quad G_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

Exercice 6. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^n (n-k+1)$ de deux manières différentes : en scindant la somme, puis sans la scinder.
2. De même, calculer $T_n = \sum_{k=2}^{n+1} (k^2 - 2k + 1)$ de deux manières différentes.

Exercice 7. Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{4k+1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$$

2. En déduire une expression de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{4k+1}{k(k+1)(k+2)}$ en fonction de n .

Exercice 8. Notons

$$S_4 = \sum_{k=1}^n k^4, \quad S_3 = \sum_{k=1}^n k^3, \quad S_2 = \sum_{k=1}^n k^2 \quad \text{et} \quad S_1 = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1. Calcul de S_2 .

- a. Développer $(k+1)^3$ et en déduire une expression de $\sum_{k=0}^n (k+1)^3$ en fonction de S_3, S_2, S_1 et n .
- b. Déterminer $\sum_{k=0}^n (k+1)^3 - \sum_{k=0}^n k^3$.
- c. En déduire S_2 .

2. Mener une démarche analogue pour retrouver l'expression de S_3 .

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de cet exercice est de vérifier que

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

1. Montrer que $\left(\sum_{k=1}^n k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n k^2\right) + 2\left(\sum_{1 \leq k < l \leq n} kl\right)$.

On pourra commencer par justifier que $\left(\sum_{k=1}^n k\right)^2 = \sum_{k=1}^n \left(k \sum_{l=1}^n l\right)$.

2. Montrer que $\sum_{1 \leq k < l \leq n} kl = \sum_{l=1}^n \frac{l^2(l-1)}{2}$, et en déduire le résultat.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{2}\right)$.

Exercice 11. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite donnée par

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Montrer que $u_n \leq 2^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 12. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + n(n-1)2^n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n}{2^n}$.

1. Ecrire la relation de récurrence vérifiée par la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. À l'aide d'un télescopage, donner une expression de v_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire u_n .

Exercice 13. Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Calculer les sommes doubles suivantes.

$$A = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^m p(q^2 + 1), \quad B = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1, \quad C = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i 1,$$

$$D = \sum_{0 \leq i, j \leq n} i, \quad E = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} i, \quad F = \sum_{0 \leq i, j \leq n} i 2^j,$$

$$G = \sum_{0 \leq i, j \leq n} (2^i - 1)2^{ij}, \quad H = \sum_{0 \leq i, j \leq n} \max(i, j).$$

Exercice 14. 1. Démontrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\tan(x) \geq x$.

2. Démontrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\tan(x) \geq x + \frac{x^3}{3}$.

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \tan\left(\frac{k}{n}\right) \geq \frac{(7n+1)(n+1)}{12n}.$$

Exercice 15. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(a_i)_{1 \leq i \leq n}, (b_j)_{1 \leq j \leq n}$ deux familles de nombres réels. Le but de l'exercice est de montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

Pour cela, on introduit la fonction $P : x \mapsto \sum_{i=1}^n (x|a_i| + |b_i|)^2$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe α, β, γ tels que pour tout réel x , $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.
2. Que peut-on dire du signe de la fonction polynomiale P ?
3. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
4. A quelle condition cette inégalité est-elle une égalité ?
5. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n |a_i| \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}.$$

Exercice 16. On définit la suite (u_n) par la donnée de u_0 et u_1 deux réels et par la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -2(n+1)u_n.$$

Exprimer simplement u_n en fonction de n et sans utiliser le symbole $\prod$.

On pourra distinguer les cas n pair et n impair.

Exercice 17. Déterminer, par analyse-synthèse, l'ensemble des entiers n de $\mathbb{N}^*$ pour lesquels l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ peut être séparé en deux sous-ensembles dont la somme des éléments est la même.