5. Calcul matriciel

Exercice 1. Calculer les produits matriciels suivants :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad \text{où } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 2. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Calculer, lorsque cela est possible, $A + B$, AB , BA , AX , BX , A^2 , tA , tB , ${}^tA{}^tB$.

Exercice 3.

- Soient $L = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$. Calculer si possible LC et CL .
- Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}$. Calculer si possible tXY et $X{}^tY$.

Exercice 4. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- Calculer AB , ${}^tA{}^tB$ et ${}^tB{}^tA$.
- Vérifier que ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.

Exercice 5.

- Construire les deux matrices de $\mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ de coefficients $|i - 2j|$ et $\max(i, j)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la forme générale des matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que pour tout i, j avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, on a
 - ◊ si $i \geq j + 1$, alors $a_{ij} = 0$,
 - ◊ si $i + j = n + 1$ alors $b_{ij} = 1$, sinon $b_{ij} = 0$.

3. Soient $A = (2^{i+j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (3^{i+j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$. Calculer AB .

Exercice 6. On dit qu'une matrice carrée M est *stochastique* si ses coefficients sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1.

- Traduire cette définition avec des quantificateurs. Donner un exemple de matrice stochastique.
- Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est encore une matrice stochastique.

Exercice 7 – Conjecture/Réurrence. Déterminer les puissances n -ièmes de :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

- Calculer $A = \frac{1}{3}(M - I)$, puis A^2 .
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = I + u_n A$ avec $u_n = 1 - (-2)^n$.

Exercice 9. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Calculer P^2 , Q^2 , PQ et QP .
- Déterminer deux réels a et b tels que $A = aP + bQ$.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = a^n P + b^n Q$. En déduire A^n .

Exercice 10. Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. 1. Déterminer l'ensemble de matrices qui commutent avec

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire les matrices $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ solutions de l'équation $X^2 = B$.

Exercice 12. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{C}(A)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui commutent avec A .

1. Calculer le produit $P^t P$. En déduire que P est inversible et déterminer P^{-1} .
2. Calculer la matrice $D = P^{-1} A P$ et vérifier que D est diagonale. En déduire une expression de A en fonction de D , P et P^{-1} .
3. En déduire par une récurrence l'expression de A^n en fonction de P , P^{-1} , D et n . Donner alors l'expression matricielle (sous forme d'un seul tableau de nombre) de A^n .
4. Montrer que $M \in \mathcal{C}(A)$ si et seulement si $DN = ND$, où N est une nouvelle matrice dont on donnera l'expression en fonction de M .
5. Expliciter l'ensemble $\mathcal{C}(D)$ des matrices qui commutent avec D , c'est-à-dire $\mathcal{C}(D) = \{C \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}), DC = CD\}$.
6. En déduire une expression explicite de $\mathcal{C}(A)$.

Exercice 13. Soit A une matrice *symétrique* et inversible. Montrer que A^{-1} est symétrique.

Exercice 14. Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A^2 + 5A = 0_n$. Déterminer A^{-1} .

Exercice 15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 + 4A^3 + A^2 - A + I_n = 0_n$ et $A^5 + A^6 = 0_n$. Montrer que $A = -I_n$.

Exercice 16. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B commutent.

1. Justifier que pour tout $p \in \mathbb{N}$, A et B^p commutent.
2. Justifier que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $q \in \mathbb{N}$, A^q et B^p commutent.
3. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$A^m - B^m = (A - B) \sum_{k=0}^{m-1} A^k B^{m-1-k}.$$

4. Soit N une matrice telle qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^m = 0_n$. Montrer que $I_n + N$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 17. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 3^n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.
2. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, v_0 \in \mathbb{R}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - v_n \text{ et } v_{n+1} = 3v_n. \end{cases}$$

- a. Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

- b. En déduire une expression explicite de u_n et v_n , pour $n \in \mathbb{N}$.