5. Calcul matriciel

Exercice 1. Calculer les produits matriciels suivants :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}, \text{ où } (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2.$$

Exercice 2. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Calculer, lorsque cela est possible, $A+B$, AB, BA, AX, BX, A^2, ${}^tA$, ${}^tB$, ${}^tA{}^tB$.

Exercice 3.

1. Soient $L = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$. Calculer si possible LC et CL.
2. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}$. Calculer si possible ${}^tXY$ et $X{}^tY$.

Exercice 4. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $AB, {}^tA{}^tB$ et ${}^tB{}^tA$.
2. Vérifier que ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.

Exercice 5.

1. Construire les deux matrices de $\mathscr{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ de coefficients $|i-2j|$ et $\max(i,j)$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Donner la forme générale des matrices $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que pour tout i,j avec $1\leqslant i\leqslant n$ et $1\leqslant j\leqslant n$, on a
   - ◇ si $i\geqslant j+1$, alors $a_{ij}=0$,
   - ◇ si $i+j=n+1$ alors $b_{ij}=1$, sinon $b_{ij}=0$.
3. Soient $A = (2^{i+j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (3^{i+j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant q}}$. Calculer AB.

Exercice 6. On dit qu'une matrice carrée M est *stochastique* si ses coefficients sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1.

1. Traduire cette définition avec des quantificateurs. Donner un exemple de matrice stochastique.
2. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est encore une matrice stochastique.

Exercice 7 – *Conjecture/Récurrence*. Déterminer les puissances n-ièmes de :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A = \frac{1}{3}(M - I_3)$, puis A^2.
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $M^n = I_3 + u_n\, A$ avec $u_n = 1-(-2)^n$.

Exercice 9. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer P^2, Q^2, PQ et QP.
2. Déterminer deux réels a et b tels que $A = aP + bQ$.
3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}, A^n = a^nP + b^nQ$. En déduire A^n.

Exercice 10. Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. 1. Déterminer l'ensemble de matrices qui commutent avec

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ solutions de l'équation $M^2 = B$.

Exercice 12. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le produit $P\,{}^tP$. En déduire que P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$ et vérifier que D est diagonale. En déduire une expression de A en fonction de D, P et P^{-1}.
3. En déduire par une récurrence l'expression de A^n en fonction de P, P^{-1}, D et n. Donner alors l'expression matricielle (sous forme d'un seul tableau de nombre) de A^n.
4. On note $\mathscr{C}(A)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui commutent avec A. Montrer que $M \in \mathscr{C}(A)$ si et seulement si $DP^{-1}MP = P^{-1}MPD$.
5. Montrer que l'ensemble $\mathscr{C}(D)$ des matrices qui commutent avec D est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$,
$$DB = BD \quad \Leftrightarrow \quad B \text{ est diagonale.}$$
6. En déduire une expression explicite de $\mathscr{C}(A)$.

1. On a
$${}^tP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Le calcul donne $P\,{}^tP = 2I_4$, donc $P\left(\frac{1}{2}\,{}^tP\right) = I_4$. On en déduit que P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{2}\,{}^tP$.

2. On a $D = P^{-1}AP = \dfrac{1}{2}{}^tPAP$, donc
$$D = \frac{1}{2}{}^tP\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
La matrice D est bien diagonale.
On sait que $PP^{-1} = P^{-1}P = I_4$. On a, en multipliant à gauche des deux côtés de l'égalité par P,
$$PP^{-1}AP = PD, \quad \text{donc} \quad AP = PD.$$
En multipliant maintenant à droite par P^{-1}, on obtient $APP^{-1} = PDP^{-1}$, donc $A = PDP^{-1}$.

3. On remarque que $A^2 = A\,A = PDP^{-1}\,PDP^{-1} = PD\,DP^{-1} = PD^2P^{-1}$. On conjecture que pour tout entier naturel n, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.
Nous allons montrer ce résultat par récurrence. On note $\mathcal{P}(n)$: "$A^n = PD^nP^{-1}$".
   - *Initialisation.* On a $A^0 = I_4$ et $PD^0P^{-1} = PI_4P^{-1} = PP^{-1} = I_4$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.
   - *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a,
$$\begin{aligned} A^{n+1} = A^n\,A = PD^nP^{-1}\,PDP^{-1} = PD^n\,I_4\,DP^{-1} &= PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1}, \end{aligned}$$
donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Ainsi, nous avons montré par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La matrice D est diagonale, donc $D^n = \mathrm{Diag}\big((-2)^n, (-1)^n, 1, 2^n\big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On calcule alors A^n :
$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= \frac{1}{2}PD^n\,{}^tP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 & 2^n \\ 0 & (-1)^n & 1 & \\ 0 & -(-1)^n & 1 & \\ -(-2)^n & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}{}^tP \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n+(-2)^n & 0 & 0 & 2^n-(-2)^n \\ 0 & 1+(-1)^n & 1-(-1)^n & 0 \\ 0 & 1-(-1)^n & 1+(-1)^n & 0 \\ 2^n-(-2)^n & 0 & 0 & 2^n+(-2)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On peut remarquer que l'écriture se simplifie en fonction de la parité de n :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \text{ si } n \text{ est pair,} \quad A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2^n \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2^n & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ si } n \text{ est impair.}$$

4. On sait que $M \in \mathscr{C}(A)$ ssi $AM = MA$, ce qui se récrit $PDP^{-1}M = MPDP^{-1}$ par la question 2. Or on a, en multipliant à gauche par P^{-1} dans l'égalité :

$$\begin{aligned} PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \quad &\Leftrightarrow \quad P^{-1}PDP^{-1}M = P^{-1}MPDP^{-1} \\ &\Leftrightarrow \quad DP^{-1}M = P^{-1}MPDP^{-1}. \end{aligned}$$

On multiplie maintenant à droite par P dans l'égalité, et on obtient :

$$PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \Leftrightarrow DP^{-1}MP = P^{-1}MPD.$$

5. Soit $B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. On a

$$DB = BD \iff \begin{pmatrix} -2a & -2b & -2c & -2d \\ -e & -f & -g & -h \\ i & j & k & l \\ 2m & 2n & 2o & 2p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a & -b & c & 2d \\ -2e & -f & g & 2h \\ -2i & -j & k & 2l \\ -2m & -n & o & 2p \end{pmatrix}.$$

Deux matrices étant égales si et seulement si leurs coefficients sont deux à deux égaux, on obtient :

$$\begin{aligned} DB = BD \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2a = -2a & -2b = -b & -2c = c & -2d = 2d \\ -e = -2e & -f = -f & -g = g & -h = 2h \\ i = -2i & j = -j & k = k & l = 2l \\ 2m = -2m & 2n = -n & 2o = o & 2p = 2p \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} & b = 0 & c = 0 & d = 0 \\ e = 0 & & g = 0 & h = 0 \\ i = 0 & j = 0 & & l = 0 \\ m = 0 & n = 0 & o = 0 & \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad \text{i.e. } B \text{ est diagonale.} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{C}(D)$ est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

6. D'après la question 4., on sait que $M \in \mathscr{C}(A)$ ssi $DP^{-1}MP = P^{-1}MPD$, c'est-à-dire $P^{-1}MP \in \mathscr{C}(D)$ Par la question précédente, ceci équivaut à dire que $P^{-1}MP$ est diagonale. Par conséquent :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C}(A) \quad &\Leftrightarrow \quad P^{-1}MP = C \text{ où } C \text{ est diagonale} \\ &\Leftrightarrow \quad M = PCP^{-1}, \text{ où } C \text{ est diagonale,} \end{aligned}$$

où on a multiplié à gauche par P, et à droite par P^{-1}. Finalement, ceci signifie que

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C}(A) \quad &\Leftrightarrow \quad M = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} P^{-1} \text{ où } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha+\delta & 0 & 0 & -\alpha+\delta \\ 0 & \beta+\gamma & -\beta+\gamma & 0 \\ 0 & -\beta+\gamma & \beta+\gamma & 0 \\ -\alpha+\delta & 0 & 0 & \alpha+\delta \end{pmatrix}, \\ &\quad \text{où } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

car $P^{-1} = \frac{1}{2}\,{}^tP$. Quitte à multiplier les réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ par deux, on peut ainsi écrire :

$$\mathscr{C}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha+\delta & 0 & 0 & -\alpha+\delta \\ 0 & \beta+\gamma & -\beta+\gamma & 0 \\ 0 & -\beta+\gamma & \beta+\gamma & 0 \\ -\alpha+\delta & 0 & 0 & \alpha+\delta \end{pmatrix}, \ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

Exercice 13. Soit A une matrice *symétrique* et inversible. Montrer que A^{-1} est symétrique.

Exercice 14. Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A^2 + 5A = 0_n$. Déterminer A^{-1}.

Exercice 15. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 + 4A^3 + A^2 - A + I_n = 0_n$ et $A^5 + A^6 = 0_n$. Montrer que $A = -I_n$.

Exercice 16. Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B commutent.

1. Justifier que pour tout $p \in \mathbb{N}, A$ et B^p commutent.
2. Justifier que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $q \in \mathbb{N}, A^q$ et B^p commutent.
3. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^\star$,

$$A^m - B^m = (A-B)\sum_{k=0}^{m-1} A^k B^{m-1-k}.$$

4. Soit N une matrice telle qu'il existe $m \in \mathbb{N}^\star$ tel que $N^m = 0_n$. Montrer que $I_n + N$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 17. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 3^n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.
2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R},\ v_0 \in \mathbb{R}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - v_n \text{ et } v_{n+1} = 3v_n. \end{cases}$$

   a. Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

   b. En déduire une expression explicite de u_n et v_n, pour $n \in \mathbb{N}$.