6. Ensembles, applications

1 Ensembles

Exercice 1. Donner l'écriture en extension des ensembles suivants.

1. $\{n \in \mathbb{N},\ n < 8 \text{ et } n \geqslant 2\}$
2. $\{n \in \mathbb{N},\ n < 8 \text{ ou } n \geqslant 2\}$
3. $\{n \in \mathbb{N},\ n < 2 \text{ et } n \geqslant 8\}$
4. $\{n \in \mathbb{N},\ n < 2 \text{ ou } n \geqslant 8\}$
5. $\{n \in \mathbb{N},\ \frac{n}{3} \in \mathbb{N}\}$
6. $\{n \in \mathbb{N},\ \frac{n-2}{3} \in \mathbb{N}\}$
7. $\{n^4,\ n \in \mathbb{N}^\star\}$
8. $\{x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ x = (-3)^n\}$
9. $\{2^{-n},\ n \in \mathbb{N}\}$
10. $\{(-1)^n,\ n \in \mathbb{N}\}$

Exercice 2. Donner une écriture en compréhension ou en paramétrisation des ensembles suivants.

1. $\{\dots, -12, -9, -6, -3, 3, 6, 9, 12, \dots\}$
2. $\{-8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13\}$
3. $\{\dots, -17, -15, -13, -11, -9, -7, -5, -3, -1\}$
4. $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \dots\}$
5. $\left\{\dots, \frac{1}{128}, \frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \dots\right\}$
6. $\{1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, \dots\}$
7. $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \dots\right\}$

Exercice 3.

1. Soit $E = \{0\}$. Décrire l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ en extension.
2. Même question si $E = \{1, 2\}$.

Exercice 4. On donne les ensembles $A = \mathbb{R}^2$, $B = (\mathbb{R}^\star)^2$, $C = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, et $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\star$. Identifier auxquels de ces ensembles appartiennent les couples suivants : $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$.

Exercice 5. Donner une représentation graphique des sous-parties suivantes de $\mathbb{R}^2$:

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y \geqslant 1\}$
2. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy < 0\}$
3. $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \leqslant \min(x, 2-x) \ \text{ et } y \geqslant -1\}$
4. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geqslant x^2 \ \text{ ou } y^2 + (x-1)^2 \leqslant 1\}$

Exercice 6. On considère les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x - y = 2\} \text{ et } B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (3x + y + 2)(x + 2y + 4) \geqslant 0\}$$

Montrer que $A \subset B$. A-t-on $A = B$?

Exercice 7.

1. Soient A l'ensemble des entiers naturels multiples de 6 et B l'ensemble des entiers naturels multiples de 3. Montrer que $A \subset B$.
2. Soient $E = \{x \in \mathbb{R},\ |x-2| \leqslant 3\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R},\ x \leqslant 5\}$. Montrer que $E \subset F$.
3. Soient $E = \{x \in \mathbb{R},\ x < 1\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R},\ |x-3| > 2\}$. Montrer que $E \subset F$.

Exercice 8. Soient A, B deux ensembles. Montrer que

$$A \subset B \ \Leftrightarrow\ A \cup B = B \ \Leftrightarrow\ A \cap B = A.$$

Exercice 9. Soient A, B, C trois sous-parties d'un ensemble E.

1. Montrer que si $A \cup B = A \cap B$ alors $A = B$.
2. *a.* Montrer que $(A \cup B) \setminus A = B \cap \overline{A}$.
   b. On suppose que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.

Exercice 10. Soient E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E. Montrer que

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \ = \ A \cup B.$$

2 Applications

Exercice 11. Tracer le graphe :

1. d'une application surjective de $[0,1]$ dans $[0,1]$ mais qui n'est pas injective.
2. d'une application injective de $[0,1]$ dans $[0,1]$ mais qui n'est pas surjective.
3. d'une application bijective de $[0,1]$ dans $[0,1]$ mais qui n'est pas continue.

Exercice 12. Soient E un ensemble et A une partie de E, on définit *l'indicatrice de* A comme l'application $\mathbb{1}_A$ de E dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}.$$

Soient A et B deux parties de E. Dans chacun des cas suivants, écrire f sous la forme $\mathbb{1}_C$, où C est une partie de E qu'on précisera.

1. $f = 1 - \mathbb{1}_A$
2. $f = \min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$
3. $f = \max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$
4. $f = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$
5. $f = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$.

Exercice 13. Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives (si oui, déterminer leur application réciproque) ?

a. $f_1 : \begin{array}{ll} \mathbb{R}_+ & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto |x| \end{array}$

b. $f_2 : \begin{array}{ll} [-1,1] & \to [0,1] \\ x & \mapsto |x| \end{array}$

c. $f_3 : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to]1,+\infty[\\ x & \mapsto e^{-x}+1 \end{array}$

d. $f_4 : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \\ x & \mapsto \cos(x)+\sin(x) \end{array}$

Exercice 14. Soit

$$f : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \to & [1,+\infty[\\ x & \mapsto & e^{(\ln(x))^2}. \end{array}$$

Démontrer que f est une bijection et déterminer une expression de sa bijection réciproque.

Exercice 15. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{x^2}+1. \end{array}$$

1. Montrer que f n'est ni injective, ni surjective.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle J à préciser, ainsi qu'une bijection de $\mathbb{R}_-$ dans J. On explicitera les applications réciproques de ces deux bijections.

Exercice 16. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+(-1)^n. \end{array}$

1. Montrer que f est bijective.
2. Calculer $f \circ f$. En déduire l'expression de la réciproque f^{-1} de f.
3. Résoudre l'équation : $347 = n + (-1)^n$ où $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 17. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y,\, xy). \end{array}$

1. L'application f est-elle injective ?
2. *a.* Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$(a,b) \in f(\mathbb{R}^2) \iff a^2 - 4b \geqslant 0.$$

   b. L'application f est-elle surjective ?

Exercice 18. Soient E, F, G trois ensembles, $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $g \in \mathcal{F}(F,G)$. On pose $h = g \circ f$. Montrer que :

a. si h est injective, alors f est injective.
b. si h est surjective, alors g est surjective.
c. si h est surjective et g injective, alors f est surjective.
d. si h est injective et f surjective, alors g est injective.

Exercice 19. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On définit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times P(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A,\, X \cap B) \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
3. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

Exercice 20. Soit f une application de E dans F avec E et F de cardinal fini.

1. Si f est surjective, que peut-on en déduire sur $\mathrm{Card}(E)$ et $\mathrm{Card}(F)$?
2. Si f est injective, que peut-on en déduire sur $\mathrm{Card}(E)$ et $\mathrm{Card}(F)$?
3. Si f est bijective, que peut-on en déduire sur $\mathrm{Card}(E)$ et $\mathrm{Card}(F)$?

4. On considère le cas particulier où $E = F = [\![0, n]\!]$, avec $\in \mathbb{N}$. On considère de plus que pour tout $p \in E$, $f(p) \geqslant p$ et que f est surjective. Que peut-on en déduire sur f ?

Exercice 21. Calculer

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$

Exercice 22. On désigne par n et k deux entiers naturels tels que $k \leqslant n$.

1. Montrer que pour tout $i \in [\![k, n]\!]$, on a $\displaystyle\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}$.
2. En déduire que pour tout réel x, on a :

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{k} x^{n-i} = \binom{n}{k}(1+x)^{n-k}.$$

Exercice 23. Calculer, pour tout entier $n \geqslant 2$ et pour tout réel x :
$\displaystyle S = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^{k-2}$.