6. Ensembles, applications

1 Ensembles

Exercice 1. Donner l'écriture en extension des ensembles suivants.

1. $\{n \in \mathbb{N}, n < 8 \text{ et } n \geq 2\}$ 2. $\{n \in \mathbb{N}, n < 8 \text{ ou } n \geq 2\}$ 3. $\{n \in \mathbb{N}, n < 2 \text{ et } n \geq 8\}$ 4. $\{n \in \mathbb{N}, n < 2 \text{ ou } n \geq 8\}$ 5. $\{n \in \mathbb{N}, \frac{n}{3} \in \mathbb{N}\}$	6. $\{n \in \mathbb{N}, \frac{n-2}{3} \in \mathbb{N}\}$ 7. $\{n^4, n \in \mathbb{N}^*\}$ 8. $\{x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, x = (-3)^n\}$ 9. $\{2^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$ 10. $\{(-1)^n, n \in \mathbb{N}\}$

Exercice 2. Donner une écriture en compréhension ou en paramétrisation des ensembles suivants.

1. $\{\dots, -12, -9, -6, -3, 3, 6, 9, 12, \dots\}$
2. $\{-8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13\}$
3. $\{\dots, -17, -15, -13, -11, -9, -7, -5, -3, -1\}$
4. $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \dots\}$
5. $\{\dots, \frac{1}{128}, \frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \dots\}$
6. $\{1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, \dots\}$
7. $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \dots\}$

Exercice 3.

1. Soit $E = \{0\}$. Décrire l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ en extension.
2. Même question si $E = \{1, 2\}$.

Exercice 4. On donne les ensembles $A = \mathbb{R}^2$, $B = (\mathbb{R}^*)^2$, $C = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, et $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Identifier auxquels de ces ensembles appartiennent les couples suivants : $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$.

Exercice 5. Donner une représentation graphique des sous-parties suivantes de $\mathbb{R}^2$:

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y \geq 1\}$

2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy < 0\}$
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \leq \min(x, 2 - x) \text{ et } y \geq -1\}$
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq x^2 \text{ ou } y^2 + (x - 1)^2 \leq 1\}$

Exercice 6. On considère les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - y = 2\} \text{ et } B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (3x + y + 2)(x + 2y + 4) \geq 0\}$$

Montrer que $A \subset B$. A-t-on $A = B$?

Exercice 7.

1. Soient A l'ensemble des entiers naturels multiples de 6 et B l'ensemble des entiers naturels multiples de 3. Montrer que $A \subset B$.
2. Soient $E = \{x \in \mathbb{R}, |x - 2| \leq 3\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R}, x \leq 5\}$. Montrer que $E \subset F$.
3. Soient $E = \{x \in \mathbb{R}, x < 1\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R}, |x - 3| > 2\}$. Montrer que $E \subset F$.

Exercice 8. Soient A, B deux ensembles. Montrer que

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A.$$

Exercice 9. Soient A, B, C trois sous-parties d'un ensemble E .

1. Montrer que si $A \cup B = A \cap B$ alors $A = B$.
2. a. Montrer que $(A \cup B) \setminus A = B \cap \bar{A}$.
b. On suppose que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.

Exercice 10. Soient E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E . Montrer que

$$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup B.$$

2 Applications

Exercice 11. Tracer le graphe :

1. d'une application surjective de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ mais qui n'est pas injective.
2. d'une application injective de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ mais qui n'est pas surjective.
3. d'une application bijective de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ mais qui n'est pas continue.

Exercice 12. Soient E un ensemble et A une partie de E , on définit l'indicatrice de A comme l'application $\mathbb{1}_A$ de E dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soient A et B deux parties de E . Dans chacun des cas suivants, écrire f sous la forme $\mathbb{1}_C$, où C est une partie de E qu'on précisera.

1. $f = 1 - \mathbb{1}_A$
2. $f = \min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$
3. $f = \max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$
4. $f = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$
5. $f = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$.

Exercice 13. Les fonctions suivantes sont-elles injectives? surjectives? bijectives (si oui, déterminer leur bijection réciproque)?

$a. f_1 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto x $	$c. f_3 : \mathbb{R} \rightarrow]1, +\infty[$
$x \mapsto e^{-x} + 1$
$b. f_2 : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$
$x \mapsto x $	$d. f_4 : \mathbb{R} \rightarrow [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
$x \mapsto \cos(x) + \sin(x)$

Exercice 14. Soit

$$f : [1, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$$

$$x \mapsto e^{(\ln x)^2}.$$

Démontrer que f est une bijection et déterminer une expression de sa bijection réciproque.

Exercice 15. On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto e^{x^2} + 1.$$

1. Montrer que f n'est ni injective, ni surjective.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle J à préciser, ainsi qu'une bijection de $\mathbb{R}_-$ dans J . On explicitera les bijections réciproques de ces deux bijections.

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$n \mapsto n + (-1)^n.$$

1. Calculer $f \circ f$. En déduire que f est bijective, puis l'expression de la réciproque f^{-1} de f .
2. Résoudre l'équation : $347 = n + (-1)^n$ où $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto (x + y, xy).$$

1. L'application f est-elle injective?
2. a. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$(a, b) \in f(\mathbb{R}^2) \Leftrightarrow a^2 - 4b \geq 0.$$
 b. L'application f est-elle surjective?

Exercice 18. Soient E, F, G trois ensembles, $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$. On pose $h = g \circ f$. Montrer que :

- a. si h est injective, alors f est injective.
- b. si h est surjective, alors g est surjective.
- c. si h est surjective et g injective, alors f est surjective.
- d. si h est injective et f surjective, alors g est injective.

Exercice 19. Soient A et B deux parties d'un ensemble E . On définit

$$f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$$

$$X \mapsto (X \cap A, X \cap B)$$

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
3. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

Exercice 20. Soit f une application de E dans F avec E et F de cardinal fini.

1. Si f est surjective, que peut-on en déduire sur $\text{Card}(E)$ et $\text{Card}(F)$?
2. Si f est injective, que peut-on en déduire sur $\text{Card}(E)$ et $\text{Card}(F)$?
3. Si f est bijective, que peut-on en déduire sur $\text{Card}(E)$ et $\text{Card}(F)$?
4. On considère le cas particulier où $E = F = \llbracket 0, n \rrbracket$, avec $n \in \mathbb{N}$. On considère de plus que pour tout $p \in E$, $f(p) \geq p$ et que f est surjective. Que peut-on en déduire sur f ?

Exercice 21. Calculer

$$\begin{array}{l|l} 1. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k & 3. \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} \\ 2. \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} & 4. \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} \end{array}$$

Exercice 22. On désigne par n et k deux entiers naturels tels que $k \leq n$.

1. Montrer que pour tout $i \in \llbracket k, n \rrbracket$, on a $\binom{n}{i} \binom{i}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k}$.
2. En déduire que pour tout réel x , on a :

$$\sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k} x^{n-i} = \binom{n}{k} (1+x)^{n-k}.$$

Solution.

1. Soit $i \in \llbracket k, n \rrbracket$. On a

$$\binom{n}{i} \binom{i}{k} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{i!}{k!(i-k)!} = \frac{n!}{k!(n-i)!(i-k)!}.$$

$$\text{Or } \binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n-k)!}{(i-k)!(n-i)!} = \frac{n!}{k!(n-i)!(i-k)!}.$$

On a donc bien montré l'égalité souhaitée.

2. Par la question précédente, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k} x^{n-i} &= \sum_{i=k}^n \binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k} x^{n-i} \\ &= \binom{n}{k} \sum_{i=k}^n \binom{n-k}{i-k} x^{n-i} \\ &\stackrel{j=i-k}{=} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} x^{n-k-j} \\ &= \binom{n}{k} (1+x)^{n-k}, \end{aligned}$$

par la formule du binôme de Newton.

Exercice 23. Calculer, pour tout entier $n \geq 2$ et pour tout réel x :

$$S = \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^{k-2}.$$