7. Suites réelles

Exercice 1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par

$$u_0 = 2, v_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n, \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n + v_n)$ est géométrique. En déduire une expression de $u_n + v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite (w_n) définie par $w_n = \dfrac{v_n}{3^n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ est arithmétique, et en déduire une expression de w_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3. En déduire une expression explicite de u_n et v_n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 3^n. \end{cases}$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$.

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique et en déduire l'expression explicite de u_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 3. Pour chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes, déterminer une expression explicite de u_n, étudier la limite de (u_n).

1. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = 4u_n - 3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 0 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = -1,\ u_1 = 1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1} = 2\,(u_n)^2 \end{cases}$
5. $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2},\ u_1 = \dfrac{1}{3} \\ \forall n\in\mathbb{N},\quad \dfrac{1}{u_{n+2}} = \dfrac{3}{u_{n+1}} - \dfrac{2}{u_n} \end{cases}$

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 > 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n > 1$.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $v_n = \ln(u_n - 1)$. Déterminer l'expression de v_n pour tout $n\in\mathbb{N}$, et en déduire u_n.

Exercice 5. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 1,\ v_0 = 2, \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 2v_n, \\ \forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1} = 2u_n + 3v_n. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
3. Calculer alors u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 6. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} x_0 = 3,\ x_1 = 2,\ x_2 = 6, \\ \forall n\in\mathbb{N},\ x_{n+3} = 2x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n. \end{cases}$$

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $v_n = x_{n+1} - x_n$. Déterminer une relation entre v_{n+2}, v_{n+1} et v_n. Calculer également v_0 et v_1.
2. Déterminer v_n en fonction de n. En déduire x_n en fonction de n.

Exercice 7. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_n$ dans chacun des cas suivants.

1. $u_n = n^2 - 2n$, pour tout $n \geqslant 1$.
2. $u_n = \dfrac{n^2}{n!}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$, pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$.
4. $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.
5. $u_n = \dbinom{n}{k}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, où $k\in\mathbb{N}^\star$ est un entier fixé.

Exercice 8. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.

Exercice 9. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $[0,1]$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

Exercice 10. Déterminer le comportement asymptotique (convergence/divergence, limite si possible) des suites définies pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$ par :

a. $u_n = \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$

b. $u_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{3n}\right)$

c. $u_n = \left((-1)^n + n^3\right) \mathrm{e}^{-n}$

d. $u_n = \left((-1)^n + \mathrm{e}^{-n}\right) n^3$

e. $u_n = (\cos(n) + 3)\ln(n)$

f. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

g. $u_n = \dfrac{2^{\ln n}}{n}$

h. $u_n = \left\lfloor 3 + \dfrac{1}{n} \right\rfloor$

i. $u_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$, $x \in \mathbb{R}$.

j. $u_n = \dfrac{3n+1}{2n^2-1}$

k. $u_n = \dfrac{2n^2+3n+1}{5n^2+4n-2}$

l. $u_n = \dfrac{\ln^2(n) - 2}{\ln(n) + n}$

m. $u_n = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) - 3n}{n+3}$

n. $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ où $0 \leqslant a < b$.

o. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$

p. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

q. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

r. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}$

Exercice 11. Comparer les limites suivantes :

$$\lim_{m\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m\right), \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{m\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m\right) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

Exercice 12. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}.$$

1. Montrer qu'on a $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout entier naturel n.
2. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = 2\sin\left(\dfrac{u_n}{2}\right). \end{cases}$$

1. Montrer que $\sin x < x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$. Résoudre l'équation $\sin x = x$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 14. On considère les fonctions Python suivantes :

```
def U(n) :
  x=0
  for k in range(n) :
    x = (1+x)**2/4
  return x
```

```
def V(n) :
  x=1/2
  for k in range(n) :
    x = np.sqrt(1+x**2)
  return x
```

Étudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ correspondantes.

Exercice 15. On définit les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$b_0 > a_0 > 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},$$
$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Montrer que ces deux suites sont bien définies et qu'elles convergent vers un même nombre ℓ.

Exercice 16. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont adjacentes.
2. Que peut-on en déduire pour $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$?

Exercice 17. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_0 \geqslant 0$, et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{1}{v_n + 1}.$$

1. Justifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$. Étudier f et montrer qu'elle admet un unique point fixe, noté ℓ.
3. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

4. Justifier que la fonction $f \circ f$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$. Quelle est sa monotonie ? En déduire que $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, puis convergente (on note $\tilde{\ell}$ sa limite).
5. Déterminer tous les points fixes de $f \circ f$ sur $\mathbb{R}_+$, et en déduire que $\tilde{\ell} = \ell$.
6. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: "v_n est bien défini, et $v_n \geqslant 0$".
   - On a $v_0 \geqslant 0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Comme $v_n \geqslant 0$, on a $v_n + 1 \neq 0$, donc v_{n+1} est bien défini. Par ailleurs, comme $v_n + 1 > 0$, on a aussi $v_{n+1} \geqslant 0$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   On a donc montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est bien défini, et $v_n \geqslant 0$.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car $x \mapsto x+1$ l'est, et ne s'annule pas. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a
$$f'(x) \;=\; -\frac{1}{(x+1)^2}.$$
   Comme f' est négative strictement sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

   Déterminons les points fixes de f sur $\mathbb{R}_+$: pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a
$$f(x) = x \;\Leftrightarrow\; x(x+1) = 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 + x - 1 = 0.$$
   La seule solution positive de cette équation est $\ell = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, il s'agit de l'unique point fixe de f sur $\mathbb{R}_+$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $v_n = \frac{1}{v_{n-1}+1} \leqslant 1$, car $v_{n-1} \geqslant 0$. Ainsi, la suite $(v_n)_n$ est bornée à partir du rang 1, donc bornée.
4. On a
$$f \circ f : x \mapsto \frac{1}{f(x)+1}$$
   Comme pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geqslant 0$, on a $f(x) + 1 \neq 0$, donc $f \circ f(x)$ est bien défini. Par ailleurs, comme f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on sait que $f \circ f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

   Nous allons montrer que $(v_{2n})_n$ est monotone. Supposons pour commencer que $v_2 \geqslant v_0$, et montrons qu'alors $v_{2(n+1)} \geqslant v_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui assurera que $(v_{2n})_n$ est croissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: "$v_{2n+2} \geqslant v_{2n}$".
   - On a déjà $v_2 \geqslant v_0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que $v_{2n+2} \geqslant v_{2n}$. Alors comme $f \circ f$ est croissante, on a
$$f(f(v_{2n+2})) \geqslant f(f(v_{2n})), \quad \text{donc} \quad v_{2n+4} \geqslant v_{2n+2},$$
     et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie : $v_{2(n+1)+2} \geqslant v_{2(n+1)}$.

   Ainsi, on a bien montré par récurrence que $(v_{2n})_n$ est croissante.

   Si on a $v_2 < v_0$, alors on montre de manière tout à fait analogue que $(v_{2n})_n$ est décroissante. Dans tous les cas, $(v_{2n})_n$ est monotone.

   Ainsi, la suite $(v_{2n})_n$ est monotone et bornée d'après la question précédente, elle est donc convergente, et on note $\tilde{\ell}$ sa limite.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a
$$f \circ f(x) \;=\; \frac{1}{\frac{1}{x+1} + 1} \;=\; \frac{x+1}{x+2}.$$
   On en déduit alors les points fixes de $f \circ f$ sur $\mathbb{R}_+$: si $x \in \mathbb{R}_+$,
$$f \circ f(x) = x \;\Leftrightarrow\; (x+1) = x(x+2) \;\Leftrightarrow\; x^2 + x - 1 = 0$$
   Ainsi, les points fixes de $f \circ f$ sont les mêmes que ceux de f. Il y a donc un unique point fixe à $f \circ f$ sur $\mathbb{R}_+$ qui n'est autre que ℓ.

   On a $v_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\ell}$, donc $v_{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\ell}$. Par ailleurs, par continuité de $f \circ f$, on a
$$v_{2n+2} \;=\; f \circ f(v_{2n})) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f \circ f(\tilde{\ell}).$$
   Par unicité de la limite, on a $\tilde{\ell} = f \circ f(\tilde{\ell})$. Ainsi, $\tilde{\ell}$ est un point fixe de $f \circ f$ dans $\mathbb{R}_+$, on a donc $\tilde{\ell} = \ell$ par ce qui précède.
6. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{2n+1} = f(v_{2n})$, on déduit de la question précédente et de la continuité de f que
$$v_{2n+1} \;=\; f(v_{2n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell) = \ell.$$
   Ainsi, les suite $(v_{2n})_n$ et $(v_{2n+1})_n$ convergente toutes deux vers la même limite ℓ, donc $(v_n)_n$ converge également vers $\ell = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Exercice 18.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe $x_n \in [0,1]$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_n^k = 1$.

2. Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.
3. Montrer qu'elle est minorée par $\frac{1}{2}$.
4. Montrer qu'elle converge vers $\frac{1}{2}$.

Exercice 19. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 2,\ u_1 = 0,\ u_2 = 7, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$$

On introduit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, et on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer MX_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire X_n en fonction de M et X_0.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la première ligne de M^n est donnée par

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{9}((-2)^n - 6n + 8) & \frac{1}{9}((-2)^{n+1} + 3n + 2) & \frac{1}{9}((-2)^n + 3n - 1) \end{pmatrix}.$$

3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 20. Le but de l'exercice est d'étudier les solutions de l'équation $\mathrm{e}^x = x + n$ (pour $x \in \mathbb{R}$) et leur comportement lorsque n tend vers $+\infty$.

1. Réaliser une étude complète de la fonction

$$f\ :\ x \mapsto \mathrm{e}^x - x$$

On précisera le domaine de définition, le tableau de variation, les limites et on donnera l'allure du graphe.

2. Déduire de la question précédente que pour un entier $n \geqslant 2$, l'équation

$$\mathrm{e}^x = x + n$$

admet exactement 2 solutions, que l'on note x_n et y_n, avec $x_n < y_n$.

3. *a.* Comparer $f(x_{n+1})$ et $f(x_n)$, puis $f(y_{n+1})$ et $f(y_n)$, et en déduire que les suites $(x_n)_{n\geqslant 2}$ et $(y_n)_{n\geqslant 2}$ sont monotones.

   b. En déduire que $(x_n)_{n\geqslant 2}$ et $(y_n)_{n\geqslant 2}$ convergent, et déterminer leur limite.

Exercice 21. Pour tout entier $n \geqslant 3$, on note

$$f_n\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - n\ln x \end{array}$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions, qu'on notera u_n et v_n, avec $u_n < v_n$. Vérifier que $0 < u_n < n < v_n$ pour tout $n \geqslant 3$.
2. Donner la limite de la suite v_n.
3. *a.* Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $1 < u_n < \mathrm{e}$.

   b. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$. En déduire le sens de variation de $(u_n)_{n\geqslant 3}$.

   c. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est convergente, puis en encadrant $\ln u_n$, établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 22. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

1. Montrer que f est une bijection strictement croissante de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
2. *a.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, montrer que l'équation $x + \ln x = n$ possède une unique solution, que l'on notera x_n.

   b. Étudier la monotonie et la convergence de la suite (x_n).
3. *a.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, comparer $f(n)$ et n. En déduire que $x_n \leqslant n$.

   b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ n - \ln n \leqslant x_n$.

   c. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n}$.