

8. Systèmes linéaires et matrices

Exercice 1. 1. Résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$\begin{array}{ll}
 a. \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 3z = -5 \\ 2x + y + 5z = -3 \end{cases} & e. \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x + 3y - z = 2 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases} \\
 b. \begin{cases} x + 4y - 6z = 1 \\ x + y - 2z = 2 \\ -x - 3y + 5z = 0 \end{cases} & f. \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3x + 3y - 2z = 4 \\ x + 2y - 3z = 2 \end{cases} \\
 c. \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 3 \\ 3x + 2y + z = 6 \\ 4x - 2y + 3z = 5 \end{cases} & g. \begin{cases} x - 2y + 5z - 3t = 1 \\ 2x + 3y + z - 4t = 1 \\ 3x + 8y - 3z - 5t = 1 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases} \\
 d. \begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ 3x - 8y + 5z = 5 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases} &
 \end{array}$$

2. Soient a, b et c trois réels fixés. Résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ -2x - 3y + 3z = b \\ x + y - 2z = c \end{cases}$$

Exercice 2. Résoudre le système suivant en fonction de la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x - my + m^2z = m \\ mx - m^2y + mz = 1 \\ mx + y - m^2z = 1 \end{cases}$$

Exercice 3. Résoudre les systèmes suivants.

$$\begin{array}{lll}
 a. \begin{cases} \frac{2}{5x+2y} + \frac{7}{7x+3y} = 7 \\ \frac{1}{5x+2y} + \frac{3}{7x+3y} = 4 \end{cases} & b. \begin{cases} x^2y^4 = 2 \\ \frac{x^4}{y^2} = 8 \end{cases} & c. \begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}
 \end{array}$$

Exercice 4. On considère un réel λ et le système suivant :

$$\begin{cases} (2 - \lambda)x + 4z = 0 \\ 3x - (4 + \lambda)y + 12z = 0 \\ x - 2y + (5 - \lambda)z = 0 \end{cases} \quad (S)$$

Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre λ le système admet-il une unique solution ?

On sait que le système a une unique solution si et seulement si

$$A = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 0 & 4 \\ 3 & -4 - \lambda & 12 \\ 1 & -2 & 5 - \lambda \end{pmatrix} \text{ est inversible.}$$

Par opérations élémentaires, on obtient :

$$\begin{aligned}
 A \in \text{GL}_3(\mathbb{R}) & \xLeftrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 - \lambda \\ 3 & -4 - \lambda & 12 \\ 2 - \lambda & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R}) \\
 & \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1, L_3 \leftarrow L_3 - (2 - \lambda)L_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 - \lambda \\ 0 & 2 - \lambda & 3(\lambda - 1) \\ 0 & 2(2 - \lambda) & -(\lambda - 1)(\lambda - 6) \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R}) \\
 & \xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 - \lambda \\ 0 & 2 - \lambda & 3(\lambda - 1) \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda - 1) \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R})
 \end{aligned}$$

Cette dernière matrice est triangulaire, et inversible pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$. On en déduit donc que le système a une unique solution ssi $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$.

Exercice 5. J'ai trois fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez. Quand vous aurez l'âge que j'ai, ensemble nous aurons 98 ans. Quel est mon âge ?

Exercice 6. Une ébéniste fabrique trois types de jouets en bois : A, B et C. Les jouets A nécessitent 20 grammes de bois et sont vendus 5 euros ; les jouets B nécessitent 30 grammes et sont vendus 12 euros ; les jouets C nécessitent 50 grammes et sont vendus 15 euros.

Sachant qu'en une journée, l'ébéniste a fabriqué 9 jouets, a utilisé 280 grammes de

bois et a fabriqué pour 93 euros de jouets, déterminer le nombre de jouets de chaque type fabriqués par l'ébéniste durant cette journée.

Exercice 7. Soit a un réel. À quelle condition sur a la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ?

Exercice 8. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et calculer leur inverse lorsqu'elle existe.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On introduit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \lambda_1 \\ \vdots & \ddots & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels non nuls. On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

1. Écrire le système $AX = Y$ puis le résoudre.
2. En déduire que A est inversible et calculer l'inverse de A .

Exercice 10.

1. Trouver $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que pour tout réel x différent de $-2, -1, 0$ et 1 ,

$$\frac{2x^3 + 2x^2 + 6x + 4}{(x^2 - 1)(x^2 + 2x)} = \frac{a}{x + 2} + \frac{b}{x + 1} + \frac{c}{x} + \frac{d}{x - 1}.$$

2. En déduire une primitive de $x \mapsto \frac{2x^3 + 2x^2 + 6x + 4}{(x^2 - 1)(x^2 + 2x)}$ sur $]1, +\infty[$.

Exercice 11 – Lemme d'Hadamard.

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

On dit que A est une matrice à *diagonale strictement dominante*. Montrer que la matrice A est inversible.

On pourra raisonner par l'absurde en considérant une matrice colonne X non nulle telle que $AX = 0$.