9. Probabilités sur un univers fini

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère n lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on définit l'événement F_k : « on a obtenu Face au $k^{\text{ème}}$ lancer ». Écrire les événements suivants à l'aide des événements F_k.

A : « on a obtenu Pile au premier lancer et Face au deuxième. »

B : « on a obtenu au moins un Face sur les deux premiers lancers. »

C : « on n'a obtenu aucun Face sur les deux premiers lancers. »

D : « on a obtenu au moins un Face sur les n lancers. »

E : « on n'a obtenu aucun Face sur les n lancers. »

F : « on n'a obtenu qu'un seul Face sur les n lancers. »

Exercice 2. On lance une pièce de monnaie truquée telle qu'on a deux fois plus de chances d'obtenir pile que face. Déterminer la probabilité d'obtenir Face.

Exercice 3. Soient A et B deux événements. Montrer que

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1.$$

Exercice 4. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$. Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.
2. On considère $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = p$, où $p \in [0, 1]$, et $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$.
   a. Montrer que $\mathbb{P}(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) = 1$.
   b. En déduire que $p \leqslant \frac{2}{3}$.

Exercice 5. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On considère $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, et on suppose que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

1. On suppose A et B incompatibles, déterminer $\mathbb{P}_A(B)$.
2. On suppose que $A \subset B$, déterminer $\mathbb{P}_A(B)$.

Exercice 6. Une urne contient initialement 4 boules blanches et 2 boules noires.

1. On tire une boule et on la remet dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle tirée. On procède à un nouveau tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires ?
2. On tire successivement sans remise 3 boules. Quelle est la probabilité de tirer une boule noire pour la première fois au 3ème tirage ?

Exercice 7. Une urne contient 5 boules blanches et 10 boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. On tire au hasard deux boules successivement, avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche puis une boule noire ?
2. On tire au hasard deux boules successivement, sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche puis une boule noire ?
3. On tire simultanément 5 boules dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules blanches et 3 boules noires ?

Exercice 8. On tire 5 cartes au hasard d'un jeu classique de 52 cartes.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un carré de rois ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 carreaux ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un roi ?
4. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une paire, c'est-à-dire au moins deux cartes de même valeur ?
5. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un carreau ou au moins un roi ?

Exercice 9.
1. On considère une classe de n étudiants avec $n \in \mathbb{N}^\star$. Quelle est la probabilité d'avoir au moins deux personnes nées le même jour ? Pour simplifier, on considère que toutes les années comportent 365 jours.
2. Écrire une fonction à l'aide de Python qui prend le nombre d'étudiants `n` en argument, et retourne la probabilité de la question précédente.
3. Tracer sur un graphique les valeurs prises par cette probabilité lorsque `n` est compris entre 1 et 80. À partir de quelle valeur de `n` la probabilité dépasse-t-elle $\frac{1}{2}$?

Exercice 10. Un joueur joue n parties indépendantes d'un même jeu, qui a une probabilité de gain de $\frac{2}{3}$. Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on note C_k l'événement « Le joueur gagne les $k^{\text{ème}}$ et $(k+1)^{\text{ème}}$ parties, et c'est la première fois qu'il gagne deux parties consécutives ». Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on note $p_k = \mathbb{P}(C_k)$.

1. Calculer p_1 et p_2.
2. Montrer, en distinguant selon le résultat des deux premières parties, que pour tout $k \in [\![1, n-3]\!]$ on a :

$$p_{k+2} = \frac{1}{3}\, p_{k+1} + \frac{2}{9}\, p_k.$$

3. En déduire une expression de p_k en fonction de k pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Exercice 11. Un commerçant dispose d'un stock de plantes. Chacune fleurit une fois par an. Pour chaque plante, la probabilité de donner une fleur rose la première année est $\frac{3}{4}$ et celle de donner une fleur blanche est $\frac{1}{4}$. Puis les années suivantes :

- ⋆ si la plante a donné une fleur rose l'année n, elle donnera une fleur rose l'année $n+1$,
- ⋆ si la plante a donné une fleur blanche l'année n, elle donnera de manière équiprobable une fleur rose ou une fleur blanche l'année $n+1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note p_n la probabilité de l'événement R_n : "la plante donne une fleur rose l'année n".

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
2. Calculer p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, puis la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

Exercice 12. Trois machines produisent respectivement 50%, 30% et 20% de composants donnés. 2% des composants produits par la première machine sont défectueux, 3% pour la deuxième et 5% pour la troisième. On considère un composant à la sortie de l'usine.

1. Quelle est la probabilité qu'il soit défectueux ?
2. Si le composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne de la première machine ?

Exercice 13. On dispose d'un test pour une maladie dont la fréquence d'apparition est de 1/10 000. Il est précisé que le test a une fiabilité de 99% (on entend par là que le test est positif à 99% pour les personnes malades, et négatif à 99% pour les personnes saines).

Quelle est la probabilité qu'un individu ayant effectué un test positif soit malade ?

Exercice 14. Dans un magasin, un lot de 100 dés contient 25 dés pipés pour lesquels la probabilité d'obtenir 6 est $\frac{1}{2}$ et 75 dés équilibrés.

1. On prend un dé au hasard et on obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On lance ce même dé n fois de manière indépendante, et on obtient n fois le 6. Quelle est la probabilité p_n qu'il soit pipé ?
3. Déterminer la limite de la suite (p_n).

Exercice 15. Un joueur dispose d'une pièce de monnaie équilibrée qu'il lance deux fois. À chaque lancer, il gagne un euro s'il obtient pile et perd un euro s'il obtient face. On introduit les événements :

A_1 : « le joueur a obtenu pile au premier lancer »,
A_2 : « le joueur a obtenu pile au second lancer »,
B : « le joueur a gagné 0 euro après les deux lancers ».

Vérifier que A_1, A_2 et B sont deux à deux indépendants mais ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 16. Le finaliste d'un jeu est placé face à trois portes P_1, P_2 et P_3. Derrière l'une d'elle, il y a un lot à gagner, et derrière les deux autres il n'y a rien. Si le candidat ouvre la bonne porte, il emporte le lot.

Le candidat doit alors choisir une porte, et le présentateur lui désignera une des deux portes restantes qui ne renferme rien. Le candidat pourra alors choisir de garder son choix, ou en changer.

On note A l'événement « le joueur a choisi la bonne porte lors de son premier choix ».

1. Dans le scénario où le joueur garde son choix initial, quelle est la probabilité qu'il gagne ?
2. Dans le scénario où le joueur change de choix, quelle est la probabilité qu'il gagne ? Quelle stratégie le joueur a-t-il intérêt à adopter ?

Exercice 17. Une étude montre qu'une femme sur 10 000 est atteinte du cancer des bronches, et 4 hommes sur 10 000. Par ailleurs, l'étude conclut que 70% des cancers bronchiques chez la femme apparaissent chez une fumeuse, alors que 90% des cancers bronchiques chez l'homme apparaissent chez un fumeur. On précise par ailleurs que la proportion de fumeurs est 6 fois plus élevée chez l'homme que chez la femme.

Une fumeuse a-t-elle moins de risque de contracter la maladie qu'un fumeur ?