TP 2 – Révisions – Fonctions, représentation de fonctions

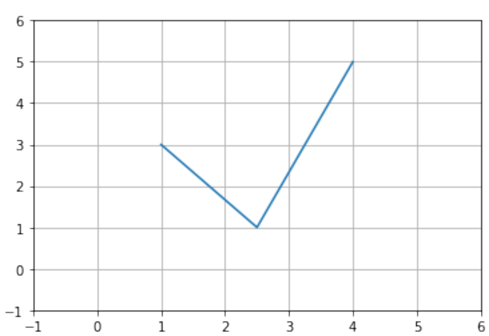
On travaille avec les modules

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

1 Tracé de lignes brisées

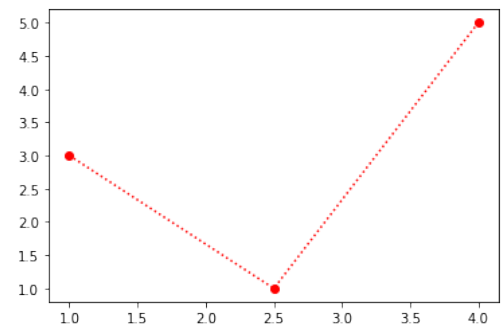
On donne la liste des abscisses et la liste des ordonnées, et on effectue le tracé. La fonction `axis` permet de définir la fenêtre dans laquelle est contenue le graphique. L'option `equal` permet d'obtenir les mêmes échelles sur les deux axes. Les tracés se superposent. La fonction `plt.clf()` efface les tracés de la fenêtre graphique.

```
x=[1., 2.5, 4.]
y=[3., 1., 5.]
plt.axis('equal')
plt.plot(x,y)
plt.axis([-1., 6., -1., 6.])
plt.grid()
plt.show()
```



Le paramètre `color` de la fonction `plot` permet de choisir la couleur (`'g'` : vert, `'r'` : rouge, `'b'` : bleu, etc.). On peut également choisir le style de tracé à l'aide de l'option `linestyle` (`'-'` : ligne continue, `'-'` : ligne discontinue, `':'` : ligne pointillée). Pour marquer les points de la liste, on utilise l'option `marker` (`'+'`, `'.'`, `'o'`, `'v'` donnent différents marqueurs).

```
plt.plot(x,y, color='r', linestyle=':',
         marker='o')
plt.show()
```

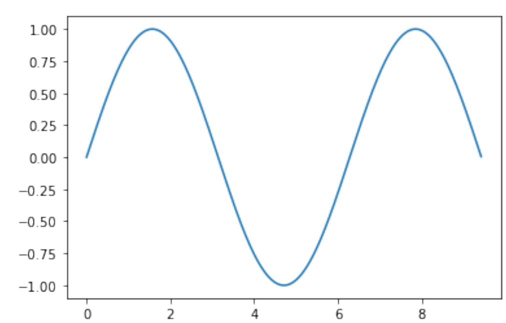


2 Tracé de fonction

On définit une liste d'abscisses, puis on construit la liste des ordonnées correspondantes, à l'aide d'une fonction introduite au préalable. Dans l'exemple ci-dessous, on trace la fonction $x \mapsto \sin x$ sur $[0, 3\pi]$.

```
def f(x):
        return np.sin(x)

x=np.arange(0, 3*np.pi, 0.01)
y=f(x)
plt.plot(x,y)
plt.show()
```



3 Exercices

Exercice 1. Écrire une fonction qui prend un entier `n` en entrée, et retourne le couple (a, b), où

$$a = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}, \quad \text{et} \quad b = \sum_{i=1}^{n} \lfloor \ln(i) \rfloor.$$

Exercice 2.

1. Justifier la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$.
2. Créer un vecteur `u` de longueur 50 qui a pour composantes les réels $\frac{(-1)^i}{i^2}$, pour $i \in [\![1, 50]\!]$.
3. Créer un vecteur `v` de longueur 50 qui a pour composantes les réels $\sum\limits_{k=1}^{i} \frac{(-1)^k}{k^2}$, pour $i \in [\![1, 50]\!]$.
4. Illustrer la convergence de la série en représentant graphiquement la suite de ses sommes partielles, et donner une valeur approchée à 10^{-1} près de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 3.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2n\, u_n + 3$. Écrire une fonction ayant pour paramètre un entier $n \geqslant 0$ et qui renvoie la valeur de u_n.
2. Même question avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.

Exercice 4. Représenter sur une même figure les représentations graphiques des fonctions sin, $x \mapsto x$, $x \mapsto x - \dfrac{x^3}{3!}$ et $x \mapsto x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Exercice 5. On considère la fonction $f \ :\ x \ \mapsto \ \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$, définie sur $\mathbb{R}$.

Après avoir justifié que f est bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, tracer sur un même graphique la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-2, 2]$ ainsi que celle de sa fonction réciproque (sans chercher à la déterminer).

Exercice 6. On note φ la fonction définie par $\varphi \ :\ x \ \mapsto \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, et on introduit la fonction

$$\Phi \ :\ x \ \mapsto \ \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\mathrm{d}t.$$

1. Définir la fonction φ en langage Python. La représenter graphiquement sur le segment $[-4, 4]$.
2. *a.* On rappelle que si f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \ = \ \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\, \frac{b-a}{n}\right).$$

   Écrire une fonction `Phi` en Python qui prend comme argument des réels `x` et `a` et un entier `n`, et renvoie une approximation de $\Phi(\mathtt{x})$. On précisera comment choisir `a` et `n` de manière adéquate.

   b. En utilisant la fonction `Phi`, tracer une approximation de la représentation graphique de Φ.

3. On souhaite vérifier graphiquement la qualité de cette représentation graphique. Pour ce faire, on a charge la bibliothèque `scipy.special` :

```
import scipy.special as sp
```

et on a recours à la fonction `sp.ndtr` qui, comme nous le verrons, est une bonne approximation de Φ.

Tracer le graphe de la fonction `sp.ndtr`, et comparer avec la courbe obtenue ci-dessus. On pourra faire varier les paramètres `a` et `n`.

Exercice 7. 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par

$$f \ : \ x \ \mapsto \ \frac{2}{x} + \ln x.$$

Tracer le graphe de f ainsi que la droite d'équation $y = x$, puis vérifier graphiquement que :

- l'intervalle $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ est stable par f,
- il existe un unique $\alpha \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$, et en déterminer une valeur approchée.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   a. Écrire une fonction `u` ayant pour paramètre d'entrée `n` et qui renvoie la valeur de u_n.

   b. On souhaite représenter graphiquement les premiers termes de la suite pour visualiser la convergence. Écrire une fonction `suite(n)` prenant en argument un entier `n` et renvoyant le vecteur `x` des abscisses et celui `y` des ordonnées de la suite de points suivante :

   $$(u_0, u_1),\ (u_1, u_1),\ (u_1, u_2),\ (u_2, u_2),\ (u_2, u_3),\ (u_3, u_3),\ \ldots,\ (u_{n-1}, u_n),\ (u_n, u_n).$$

   c. Tracer sur un même graphique la courbe représentative f pour des abscisses comprises entre 1,65 et 1,75, ainsi que la courbe obtenue en reliant les points ci-dessus pour $n = 10$, puis conjecturer le comportement asymptotique de (u_n).

3. On souhaite démontrer que la suite (u_n) converge vers α.

   a. Montrer que pour tout $(x, y) \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]^2, |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{2}{9}\ |x - y|$.

   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{2}{9}\ |u_n - \alpha|$ puis que $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

   c. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

4. Écrire une fonction qui donne une approximation de α à ε près pour $\varepsilon > 0$ donné. En déduire une valeur approchée de α à 10^{-3} près.